АНАЛИЗЪ
БЕЗКОНЕЧНО-МАЛЫХЪ

Ж. Буссинеска,

Члена Института и Профессора Математической Физики въ Парижскомъ Университетѣ.

Переводъ А. П. Ненашева.

ТОМЪ I.

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

ЧАСТЬ I.

Элементарный курсъ.

МОСКВА.

Типографія Г. Лисснера и А. Гешеля,

преемн. Э. Лисснера и Ю. Романа.

Воздвиженка, Крестовоздвиженскій пер., д. Лисснера.

1899.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Издавая переводъ замѣчательнаго по своей легкости и спеціальной полнотѣ сочиненія «Cours d'Analyse infinitésimale» par J. Boussinesq, я думаю, что иду навстрѣчу ощущающемся у насъ недостатку въ математическихъ сочиненіяхъ вообще и сочиненій по «Анализу безконечно-малыхъ» въ частности: существующія у насъ сочиненія по этому предмету либо уже нѣсколько устарѣли, либо представляютъ конспективное изложеніе профессорскихъ лекцій, могущее быть полезнымъ только передъ экзаменами, когда учащимся приходится болѣе или менѣе приноравливаться къ индивидуальнымъ особенностямъ и требованіямъ своего профессора.

Цѣль предлагаемаго мною перевода иная: не разсчитывая на широкое распространеніе вообще какихъ-либо математическихъ сочиненій въ обществѣ, гдѣ, къ сожалѣнію, относятся крайне несправедливо къ математикѣ, видя въ ней какую-то трудность и даже сухость, все же смѣю надѣяться, что найдется не мало людей, которые пожелаютъ не ограничиваться одними только лекціями профессора и поинтересоваться болѣе полнымъ изложеніемъ нѣкоторыхъ занимательныхъ вопросовъ анализа. Съ другой стороны, текущее десятилѣтіе въ Россіи должно быть отмѣчено небывалымъ до сего времени подъемомъ самообразованія и интереса къ самостоятельному изученію природы и жизни. Желающіе заняться Анализомъ безъ руководителя, надѣюсь, найдутъ въ книгѣ Буссинеска наиболѣе легкое, но вмѣстѣ съ тѣмъ полное объясненіе всѣхъ самыхъ главныхъ принциповъ этого отдѣла науки.

Нѣсколько мѣсяцевъ труда прн знаніи тѣхъ почти самыхъ неинтересныхъ отдѣловъ математики, которыя выкинуты рутниой на долю такъ называемой, но не существующей на самомъ дѣлѣ, низшей математики, будетъ вполиѣ достаточно, чтобы понять идеи н иаучнться нѣкоторому механизму анализа, что́ впослѣдствіи прн примѣненіи его къ изученію природы окупится той пользой и наслажденіемъ, которое доставляетъ красота и почти всемогущество этого столь великаго рычага человѣческаго прогресса, открытіемъ котораго мы обязаны ученымъ XVII вѣка.

Что касается самаго содержаиія, то могу прнбавить слѣдуюшее:

1) Слова самого г. Буссинеска (въ предисловіи къ французскому оригииалу):

«Произведеніе, гдѣ должны быть сконденсированы результаты, завѣщанные славными именамн науки, оставляютъ немиого мѣста лнчиымъ нзысканіямъ Автора. Но если геометры захотятъ дать себѣ трудъ познакомиться съ ними, то они увидятъ нѣсколько оргинальныхъ статей, которыя я позволилъ себѣ, гдѣ это надо, извлекать изъ свонхъ Мемуаровъ (напр. *Comptes rendus de l'Academie des Sciences; Memoires de la Société des Sciences de Lille; Journal de Mathématiques pures et appliqués;* etc.). Здѣсь мнѣ достаточно указать: въ томѣ I, естественное опредѣленіе дифференціальныхъ параметровъ функцій точки; этюдъ изотропіи тѣлъ прн помощн безконечно-малыхъ вращеній координатныхъ осей; теорію безкоиечнаго сближенія, между послѣдовательнымн кривыми одной и той же группы; теорію кривыхъ-асимптотъ и аивелопъ-асимптотъ такой же группы; формулу варьнрованія наклона поверхиости вдоль линіи уровня и свойство, отсюда вытекающее для линій, которыя я называлъ *линіями наибольшихъ и наименьшихъ покатостей* поверхностн; элементарное выраженіе расширеній, получаемыхъ малой частью кривой поверхности, которую деформнруютъ».

Всѣ эти интересныя статьи, къ сожалѣнію, представляютъ нѣкоторыя специальныя трудности и ие относятся

непосредственно къ самому Анализу, поэтому при переводѣ мною они не были перенесены въ элементарную часть, что̀ я иногда дѣлалъ съ другими статьями, отнесенными г. Буссинескомъ во II часть, но могущими и долженствующими даже быть въ элементарной части. Такъ №№ 62, 63, 67, 68, 79, 150—154, 169—172 и вся глава XIV перенесены въ элементарную часть. Такимъ образомъ цѣль раздѣленія I (какъ и II) тома, какъ самимъ Буссинескомъ, такъ и мною, на двѣ части заключается въ томъ, чтобы дать возможность изъ I части ознакомиться съ самимъ предметомъ и методомъ Дифференціальнаго Исчисленія, тогда какъ II часть спеціально предназначена ознакомленію съ примѣненіемъ анализа къ механикѣ и математической физикѣ.

Тѣмъ не менѣе каждый томъ можетъ составлять одно цѣлое, для чего въ немъ удержанъ одинъ порядокъ номеровъ статей. Статьи, отмѣченныя въ оглавленіи перваго тома звѣздочкой (*), находятся въ «Прибавленіяхъ», въ надлежащемъ мѣстѣ.

2) Существенное измѣненіе оригинала при переводѣ заключается въ томъ, что я взялъ на себя смѣлость замѣнить, гдѣ это нужно, буквы d, означающія «дифференціалъ», буквами ∂, о чемъ можно найти объясненіе въ приложеніи къ главѣ IV въ концѣ первой части.

3) Для большей ясности иногда при выраженіяхъ я ставилъ сзади окончанія падежей, какія должны были бы получить эти выраженія; такъ напр. «функція у x'а» означаетъ «функція у икса» etc.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОШИБКИ.

Стран.	*Строка*		*Напечатано:*	*Должно быть:*
31	4	сверху	получаетъ производную, равную	дѣлаетъ производную равною
36	15	„	$x'a$	x^{n-1}
45	14	„	e^x	e^x первую часть
46	10	„	пропорціональной	ирраціональной
73	17	„	не	все же
85	1	снизу	$F'_y y dx$	$F'_y y' dx$
94	14	сверху	$2(x+2\Delta x)$	$2f(x+2\Delta x)$
98	5	снизу	$\frac{\partial^2 v(u,v)}{\partial u\, \partial v}$	$\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\, \partial v}$
104	5	„	какъ	такъ какъ
107	6	„	$\frac{3x''^2 - x'x''x'''}{x'^5}$	$\frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}$
110	12	сверху	$\frac{d^2\eta}{dx} \pm \eta = 0$	$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \pm \eta = 0$
127	16	„	$y + ce^{\alpha x}$	$y = ce^{\alpha x}$
143	11	„	логариему $\lg x^x$	логариему отъ $\lg x$
147	11	снизу	$\varphi^{(n)}(0)$	$\psi^{(n)}(0)$
148	5	сверху	не будетъ уже	не менѣе будетъ
156	3	снизу	$(h+\Theta h)^n$	$(h-\Theta h)^n$
159	10	сверху	$\varphi^{(n)}(a+\Theta h)$	$\varphi^{(n)}(a+\Theta x)$
176	11	снизу	$\frac{E}{A}$	$\frac{E}{A} l$
194	8	сверху	выпуклость	вогнутость
204	11	снизу	для	дуга
221	9	сверху	$2ds$	$2sds$
235	4	„	$m'P$	$m'M$
242	14	снизу	$MT\mu$	$M'T\mu$
278	19	сверху	V	$\cos V$

ОГЛАВЛЕНІЕ
Дифференціальнаго исчисленія.

(Статьи, отмѣченныя звѣздочкой, находятся во второй части.)

ГЛАВА I.

Безпрерывныя количества и функціи.

ГЛАВА II.

Постепенное варіированіе функцій. — Разсмотрѣніе этого варіированія въ наиболѣе употребительныхъ функціяхъ.

Стран.

ГЛАВА III.

Предметъ и методъ анализа безконечно-малыхъ; раздѣленіе его на дифференціальное и интегральное исчисленіе.

ГЛАВА IV.

Обозначеніе дифференціаловъ. Дифференцированіе простыхъ и сложныхъ функцій.

ГЛАВА V.

Производныя и дифференціалы высшаго порядка простыхъ и сложныхъ функцій; *кривизна плоскостныхъ кривыхъ и *дифференціальный параметръ второго порядка функцій точки; замѣны перемѣнныхъ.

Стран.

ГЛАВА VI.

Функціи нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ и замѣны этихъ перемѣнныхъ. *Примѣненіе къ функціямъ точки и изотропіи тѣлъ.

ГЛАВА VII.

Аналитическія примѣненія дифференціальнаго исчисленія: исключеніе постоянныхъ и произвольныхъ функцій посредствомъ дифференцированія; разсмотрѣніе однородныхъ функцій; теорема Коши объ отношеніи одновременныхъ приращеній двухъ функцій и употребленіе этой теоремы, особенно при исчисленіяхъ выраженій неопредѣленной формы; разложеніе функцій въ цѣлыя серіи (строки); формулы Тэйлора и Макъ-Лорэна; разложеніе $(a+b)^m$, и т. д.

ГЛАВА VIII.

Продолженіе аналитическихъ примѣненій дифференціальнаго исчисленія: общая теорія максимальныхъ и минимальныхъ значеній функцій; задача Фермата, и т. д.; *методъ наименьшихъ квадратовъ; относительныя maxima и minima.

ГЛАВА IX.

Геометрическія примѣненія дифференціальнаго исчисленія: теорія контактовъ плоскостныхъ кривыхъ; разсмотрѣніе ихъ прямыхъ-касательныхъ, ихъ вогнутости или выпуклости и *особенныхъ точекъ.

Стран.

ГЛАВА X.

Кругъ-касательный, кривизна и эволюта плоскостныхъ кривыхъ и коническихъ сѣченій. Теорія кривыхъ-анвелопъ.

ГЛАВА XI.

Рулеты и циклоида. Плоскостныя кривыя при полярныхъ координатахъ; логариѳмическая спираль.

—

Стран.

ГЛАВА XII.

Пространственныя кривыя: касательная и особенныя точки, дуга, нормальная плоскость, плоскость-касательная, главная нормаль и бинормаль.

ГЛАВА XIII.

Кривыя поверхности; касательная плоскость и *особенныя точки нормаль; *линіи наклона.

ГЛАВА XIV.

Кривизна поверхностей.

ГЛАВА XV.

Линіи кривизны и асимптотныя линіи. Тройныя ортогональныя системы поверхностей и трансформаціи при помощи взаимныхъ радіусовъ-векторовъ. Замѣчанія относительно деформаціи поверхностей и относительно налагаемыхъ поверхностей. Геодезическія линіи.

Стран.

ПРИЛОЖЕНІЯ.

АНАЛИЗЪ БЕЗКОНЕЧНО-МАЛЫХЪ.

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

Элементарный курсъ.

ГЛАВА I

Безпрерывныя количества и функціи.

1. — Безпрерывныя положительныя и отрицательныя количества.

Извѣстно, что *безпрерывной величной* называется такая величина, части которой, будучи одного и того же вида, вообще, болѣе или менѣе отличаются другъ отъ друга. Такая величина способна быть познаваема точнымъ образомъ и составляетъ главный предметъ *математики,* если возможно, хотя бы даже мысленно, опредѣлять эти равныя части какой угодно крайней малости. Наиболѣе простымъ примѣромъ такой величины можетъ служить болѣе или менѣе длинная прямая линія. Такимъ же образомъ мы можемъ представлять *количества,* т.-е. предметы, величину которыхъ мы въ состояніи увидѣть съ этой степенью точности, посредствомъ прямыхъ линій, имѣющихъ одинъ неподвижный, другой подвижный конецъ и могущихъ такимъ образомъ показывать всевозможныя длины.

Такія количества называются *простыми,* имѣющими одно лишь измѣреніе (какъ прямая, изображающая ихъ), или *дѣйствительными* въ отличіе отъ другихъ, болѣе сложныхъ, математическихъ понятій, называемыхъ *мнимыми количествами,* такъ какъ ихъ долгое время не могли представлять; но ихъ скорѣе слѣдуетъ называть *комплексными количествами,* такъ какъ они обладаютъ, кромѣ величины еще другимъ аттрибутомъ, аналогичнымъ тому характеру геометрическихъ фигуръ, который выражается ихъ углами и называется *формой,* и такъ какъ могутъ, слѣдовательно, измѣняться въ различныхъ направленіяхъ. Но значительные шаги въ наукѣ помогли привести все, что можетъ измѣняться, къ болѣе простымъ элементамъ, такъ что теперь все это можно выражать зависимостью отъ измѣненій прямой линіи въ положительномъ или отрицательномъ направленіи. И какъ въ геометріи всякую фигуру

можно изображать съ помощью линейныхъ измѣреній, т.-е. координатъ ея точекъ, отнесенныхъ къ системѣ осей, такъ и здѣсь въ свои формулы мы будемъ вводить только простыя количества*).

Чтобы получить полное понятіе о простомъ количествѣ, представимъ себѣ прямую линію, которая выражаетъ величины, какъ имѣющую свой неподвижный конецъ очень далеко отъ мѣста, гдѣ обыкновенно находится движущійся конецъ, и какъ пройденную уже отъ неподвижнаго конца до извѣстной точки этого мѣста, называемой *началомъ*, отъ котораго она удлиняется до всякой другой точки, лежащей на ней по одну сторону этого начала, или уменьшается до всякой другой точки, лежащей по другую сторону начала, такъ что эта другая точка въ обоихъ случаяхъ будетъ подвижнымъ концомъ. Различныя значенія разсматриваемаго количества отличаются другъ отъ друга лишь этимъ удлиненіемъ или уменьшеніемъ, которыхъ, слѣдовательно, достаточно для распознаванія ихъ. Поэтому не слѣдуетъ обращать вниманіе на часть прямой, заключенную между неподвижнымъ концомъ ея, лежащимъ очень далеко, или даже *въ безконечности*, и началомъ; слѣдуетъ знать только, гдѣ находится данное начало. Всякое положеніе величины можетъ быть опредѣлено такимъ образомъ одной и той же длиной, которую надо *увеличивать* или *укорачивать*, т.-е. относить на ту или другую сторону начала, чтобы получить соотвѣтствующее дѣйствительное положеніе подвижнаго конца. Вотъ такія-то количества, представляющіяся этими длинами прямой линіи, и вводятся обыкновенно въ формулы. Къ этимъ количествамъ присоединяютъ знаки + или — и называютъ ихъ соотвѣтственно *положительными* или *отрицательными*, чтобы показать, что они при присоединеніи къ какой-либо величинѣ увеличиваютъ или уменьшаютъ ее. Эти названія выражаютъ, слѣдовательно, направленіе, въ какомъ должны проводиться прямыя, представляющія количества, или отъ начала, если онѣ однѣ, или другъ за другомъ, когда нѣсколько количествъ алгебраически складываются, т.-е. берутся вмѣстѣ такими, какими они на самомъ дѣлѣ есть съ своимъ собственнымъ значеніемъ *увеличивающихъ* или *уменьшающихъ* количествъ.

Безпрерывная и увеличивающаяся серія величинъ, какъ замѣтилъ Декартъ, заключается между $-\infty$ и ∞, проходя черезъ нуль.

2.—Исчисленіе количествъ: раздѣленіе ихъ на несоизмѣримыя и соизмѣримыя.

Идея о величинѣ, какъ мы сказали, можетъ получить желаемую цѣнность только въ количествахъ, въ которыхъ можно различать, хотя бы мысленно, равныя части какой угодно малости. Тогда одна изъ такихъ частей можетъ быть взята за *мѣру* или членъ сравненія; затѣмъ можно будетъ узнать, сколько разъ заключается эта часть въ данномъ коли-

* Въ концѣ второй главы II части будетъ помѣщено замѣчаніе о комплексахъ.

чествѣ; если она не точно содержится въ количествѣ, мы можемъ взять за членъ сравненія новую, меньшую *единицу,* содержащуюся точно въ первой мѣрѣ, и вычислить остатки отъ прежняго измѣренія, и такъ далѣе; однимъ словомъ, мы обратимъ данныя количества, съ неопредѣленнымъ приближеніемъ, въ *числа*, что̀ наиболѣе легко и ясно познаваемо нашимъ умомъ. Только *скала* или послѣдовательность чиселъ, выраженныхъ при помощи наиболѣе малой употребленной единицы, увеличивается конечными *степенями,* равными этой самой единицѣ, тогда какъ скала количествъ увеличивается безпредѣльными степенями безъ малѣйшей возможности сравненія. Поэтому получается очень мало шансовъ на то, что численное измѣреніе количествъ произойдетъ безъ остатка, если даже и употреблять послѣдовательно все меньшія и меньшія единицы, но съ тѣмъ условіемъ, что эти единицы будутъ въ конечномъ числѣ и будутъ сами конечны.

Вообще, количество можетъ выражаться числомъ только съ неопредѣленно увеличивающимся приближеніемъ: тогда его называютъ *несоизмѣримымъ* въ отличіе отъ тѣхъ, которыя точно содержатъ извѣстное число единицъ или частей единицы и называются *соизмѣримыми.*

Но всякое количество, будь оно соизмѣримо или нѣтъ, можетъ быть введено въ математическія формулы. Поэтому вмѣсто количества вводятъ безразлично его *отношеніе* къ извѣстному, опредѣленному количеству того же вида, взятому за единицу или мѣру, отношеніе, очевидно способное, какъ само данное количество, безпрерывно проходить всѣ положенія величины между $-\infty$ и $+\infty$. Это, слѣдовательно, устанавливаетъ категорію количествъ, болѣе абстрактныхъ, чѣмъ всѣ другія, служащую для исчисленія ихъ. Такъ какъ эта категорія содержитъ всевозможныя цѣлыя и дробныя числа, то тогда выражаютъ *числами* даже и несоизмѣримыя количества.

3. — Количества, служащія предѣлами другихъ перемѣнныхъ количествъ. Алгебраическія дѣйствія надъ количествами.

Безпредѣльная серія чиселъ, все менѣе и менѣе разнящихся между собой и все болѣе и болѣе приближающихся къ извѣстному количеству, можетъ быть разсматриваема, какъ рядъ послѣдовательныхъ значеній какого-либо *перемѣннаго* количества, которое можетъ неопредѣленно приближаться къ этому *постоянному* количеству. Послѣднее называется тогда *предѣломъ* разсматриваемыхъ чиселъ или перемѣннаго количества.

Вообще, *если количество послѣдовательно представляетъ безконечность значеній, но въ концѣ концовъ можетъ отличаться отъ послѣдующаго значенія своего какъ угодно мало, — то оно можетъ зародить у насъ идею о какомъ-либо постоянномъ количествѣ, къ которому оно неопредѣленно приближается и которое называется его предѣломъ.* Искомый предѣлъ кромѣ того можетъ быть точно опредѣленъ, тогда какъ пере-

мѣнное количество, которое мы хотимъ разсматривать, никогда не можетъ прійти къ какому-либо точно выраженному концу, потому что оно не можетъ имѣть двухъ сосѣднихъ значеній, разность между которыми была бы нуль.

Извѣстно, что ариѳметическія и алгебраическія дѣйствія, произведенныя надъ какими-либо (вообще дробными) числами, даютъ результаты, которые измѣняются въ зависимости отъ этихъ данныхъ чиселъ, но произвольно мало, если эти самыя числа измѣняются достаточно мало. Это можно сказать и тогда, когда измѣняется почти незамѣтнымъ образомъ природа дѣйствія, какъ напр., когда измѣняютъ на безконечно-малую дробь ε показатель n даннаго количества a, что заставляетъ умножать предыдущій результатъ a^n на множитель a^ε, замѣтно равный 1. А такъ какъ результатъ измѣняется съ n только незамѣтнымъ образомъ, то всѣ случаи возведенія въ степень и извлеченія корня, которые показываетъ выраженіе a^n, могутъ быть разсматриваемы, какъ одно общее дѣйствіе, къ которому возведенія и извлеченія относятся, какъ частные случаи.

Точно такъ же какое-либо дѣйствіе надъ данными, все болѣе и болѣе приближающимися числовыми значеніями извѣстныхъ количествъ, приводитъ къ результатамъ, каждый предыдущій изъ которыхъ отличается, какъ угодно мало, отъ послѣдующаго. Иначе сказать: вмѣсто того, чтобы производить дѣйствія надъ перемѣнными количествами, вполнѣ возможно производить ихъ надъ ихъ предѣлами. Это, даже противъ нашей воли, часто примѣняется, въ виду естественнаго *принципа единства*, который заставляетъ насъ видѣть или вводить, гдѣ это возможно, *безпрерывность*, т.-е. измѣненіе незамѣтнымъ образомъ вмѣсто однообразія, и говорить: *все, что можно было бы сказать о предѣлахъ, уже сказано о количествахъ, неопредѣленно приближающихся къ нимъ.*

Итакъ результатъ дѣйствій, произведенныхъ надъ количествами, получится численно съ приближеніемъ, пропорціональнымъ тому, котораго достигнутъ сами числовыя выраженія данныхъ количествъ, если мы съ этими выраженіями будемъ поступать согласно съ правилами, доказанными для чиселъ въ ариѳметикѣ и алгебрѣ.

4. — Сходящіяся серіи.

Примѣромъ предѣльныхъ количествъ можетъ служить сходящаяся серія.

Какъ извѣстно, *серіей* называется алгебраическая сумма неопредѣленнаго числа членовъ, полученныхъ по извѣстному закону; *сходящейся* же серіей называется такая серія, сумма безпредѣльно увеличивающагося числа членовъ которой стремится къ какому-либо предѣлу; въ противномъ случаѣ серія называется *расходящейся:* это бываетъ, когда сумма при увеличеніи числа членовъ сама увеличивается по абсолютной величинѣ

или даже колеблется между двумя болѣе или менѣе удаленными другъ отъ друга предѣлами. Напр. члены a, aq, aq^2, aq^3,... геометрической прогрессіи, сумма n первыхъ членовъ которой равна $a\,\frac{1-q^n}{1-q}$, образуетъ: 1) сходящуюся серію, имѣя предѣломъ $\frac{a}{1-q}$, если знаменатель q заключенъ между -1 и $+1$; 2) расходящуюся серію во всѣхъ другихъ случаяхъ, даже при $q=-1$; тогда сумма $a+aq+aq^2+\dots$ колеблется, ни сходясь, ни расходясь значительно, между двумя конечными предѣлами a и 0.

Сходящіяся серіи представляютъ большой интересъ особенно потому, что ихъ *значеніе*, т.-е. предѣлъ, къ которому стремится сумма ея членовъ, часто есть количество, трудно исчисляемое иначе, какъ черезъ приближеніе при помощи этихъ самыхъ серій, т.-е. черезъ вычисленіе суммы достаточно большого числа членовъ, взятыхъ въ порядкѣ, по которому они слѣдуютъ (исключая тотъ случай, когда можно воспользоваться вычисленіемъ суммы другой серіи, похожей на данную). Можно даже сказать, что приближенное числовое выраженіе всякаго несоизмѣримаго количества получается всегда только въ видѣ серіи; оно состоитъ изъ столькихъ все болѣе и болѣе уменьшающихся членовъ, сколько употребляется последовательно единицъ, сомножителей или какихъ-либо взаимныхъ частей, для измѣренія все уменьшающихся, но все-таки постоянно существующихъ остатковъ.

По свойству количествъ, стремящихся къ какому-либо предѣлу, серія

$$S=u_0+u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$$

будетъ сходящейся, если сумма,

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\dots+u_n,$$

$n+1$ первыхъ членовъ ея при n, равномъ очень большому числу, отличается произвольно мало отъ суммы $n+1+p$ первыхъ членовъ

$$S_{n+p}=S_n+(u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p}),$$

при чемъ p должно быть числомъ положительнымъ. Такимъ образомъ *необходимымъ и достаточнымъ условіемъ сходимости серіи есть то, что сумма*

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p}$$

возможно большаго числа послѣдовательныхъ членовъ дѣлается произвольно малой, если эти члены берутся достаточно удаленными.

Изъ этого слѣдуетъ:

1) въ сходящейся серіи абсолютное значеніе членовъ безконечно приближается къ нулю по мѣрѣ увеличенія числа членовъ;

2) какое-либо нарушеніе порядка членовъ не измѣняетъ предѣльнаго значенія суммы, *лишь бы только* при безпредѣльно увеличивающемся n члены, уничтожающіеся въ S_n и члены, становящіеся на ихъ мѣсто, заключались въ *предѣльномъ* числѣ, и всѣ эти члены, будучи очень отдаленными, стремились къ нулю;

3) если всѣ очень отдаленные члены — одного и того же знака, то число тѣхъ изъ нихъ, которые вводятся въ S_n, можетъ даже произвольно возрастать съ n, не вліяя на предѣльное значеніе серіи, такъ какъ, съ одной стороны, всѣ эти очень удаленные члены, будучи сложенными въ какомъ-либо числѣ (въ порядкѣ, въ которомъ ихъ пишутъ при образованіи серіи перваго вида), даютъ крайне незначительный, нулевой въ предѣлѣ, итогъ, а съ другой стороны, такъ какъ всѣ они — одного знака, то частная сумма нѣкоторыхъ изъ нихъ, выбранныхъ по желанію, еще меньше;

4) число очень удаленныхъ, уничтожающихся или вставляющихся, членовъ можетъ еще неопредѣленно увеличиваться съ n, если серія имѣетъ свои очень удаленные члены и различныхъ знаковъ, но достаточно быстро убывающими для того, чтобы, если взять ихъ всѣ по абсолютной величинѣ, они составляли сходящуюся серію;

5) напротивъ, *нарушеніе не можетъ имѣть мѣсто при числѣ неопредѣленно убывающихъ съ n членовъ, когда серія обязана своей сходимостью только тому, что она выражаетъ разность между членами извѣстнаго знака и другими почти равнозначащими* (по абсолютной величинѣ), *знака противоположнаго*, членами, стремящимися, безъ сомнѣнія, къ нулю, но довольно медленно для того, чтобы частная сумма тѣхъ или другихъ безпредѣльно могла увеличиваться, и для того, слѣдовательно, чтобы очень большое число ихъ, взятыхъ даже очень отдаленными, могло образовать замѣтный итогъ.

Эти послѣднія серіи, разсмотрѣніе которыхъ требуетъ особой тщательности, иногда называются *полусходящимися*, чтобы выразить, что быстрота уменьшенія ихъ послѣдовательныхъ членовъ не достаточна сама по себѣ для распознаванія ихъ сходимости и что сходимость ихъ зависитъ еще отъ закона ихъ составленія. Но можно еще называть *полусходящимися, расходящимися* или нѣтъ такія серіи, сумма которыхъ, если только она не превышаетъ опредѣленное число членовъ, приближается къ извѣстнымъ количествамъ въ извѣстное мгновеніе, послѣ котораго, какъ только число членовъ увеличится, она удалится отъ нихъ. Подобныя серіи тогда представляютъ большую пользу, какъ практическое средство исчисленія данныхъ количествъ.

Извѣстно, что сходимость серій съ членами одного и того же знака, напр. положительными, можетъ быть опредѣлена, если какая-либо другая серія уже установленной сходимости имѣетъ не большіе, чѣмъ первая, члены. Если это есть, то сумма

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p},$$

уменьшающаяся по условію до нуля въ этой второй серіи при увеличивающемся n, имѣетъ большее право на уничтоженіе и въ предыдущей серіи, которая поэтому должна считаться также сходящейся; кромѣ того *остатокъ* или *дополнительный членъ*, т.-е. то, что надо добавить къ

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

чтобы получить *предѣльную сумму* S или *величину* серіи, остатокъ, который я назову черезъ R_n, еще меньше въ разсматриваемой серіи, чѣмъ въ той, съ которой ее сравниваютъ, потому что онъ равняется предѣлу, къ которому стремится сумма $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}$, когда n — число неподвижное, а p — безпредѣльно увеличивается. Для упрощенія можно предположить, что члены идутъ уменьшаясь, такъ что нарушеніе порядка не вліяетъ, какъ можно это видѣть, ни на природу, ни на величину серіи.

Но различаютъ двѣ простыхъ сходящихся серіи, имѣющихъ члены одного и того же знака и могущихъ служить типами для выраженія

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}.$$

Первая серія

$$u_{n+1} + u_{n+1}\, q + u_{n+1}\, q^2 + \ldots = \frac{u_{n+1}}{1-q}$$

образуется по закону составленія геометрической прогрессіи и имѣетъ знаменатель q между 0 и 1. Такъ какъ отношеніе каждаго члена къ предыдущему равно q, то всякій разъ, какъ въ данномъ выраженіи $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$, которое имѣетъ первымъ членомъ u_{n+1}, *отношеніе каждаго члена къ предыдущему будетъ равно извѣстному числу* q, *меньшему единицы*, это выраженіе будетъ имѣть сумму меньшую, чѣмъ предыдущая $\frac{u_{n+1}}{1-q}$, и будетъ стремиться, слѣдовательно, съ u_{n+1} къ 0, т.-е. тогда, когда n безпредѣльно увеличится. *Серія* $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ *будетъ сходящейся* и, если, въ предѣлѣ, ограничиться исчисленіемъ членовъ отъ u_0 до u_n включительно, то предполагаемая ошибка R_n будетъ менѣе частнаго отъ дѣленія перваго пренебрегаемаго члена u_{n+1} на $1-q$.

Въ противномъ, относительно рѣдкомъ, случаѣ, когда отношеніе каждаго члена u_{n+2}, $u_{n+3}, \ldots$ къ предыдущему $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$ не равно и не менѣе опредѣленнаго числа q, взятаго между 0 и 1, но безконечно приближается къ 1 по мѣрѣ увеличенія n, то можно очень часто узнать, сходящаяся ли или расходящаяся серія, сравнивая ее съ серіей, служащей вторымъ типомъ сходящихся серій:

$$(1) \qquad \frac{a}{1^m} + \frac{a}{2^m} + \frac{a}{3^m} + \frac{a}{4^m} + \frac{a}{5^m} + \ldots + \frac{a}{n^m} + \ldots,$$

гдѣ m положительно и отношеніе $n^{\text{наго}}$ члена къ n $1^{\text{му}}$ выражается

черезъ $\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$. Эта серія — сходящаяся при всѣхъ значеніяхъ m, высшихъ единицы, такъ какъ тогда, если сгруппировать члены слѣдующимъ образомъ

$$(2) \quad \begin{cases} \left(\frac{a}{1^m}\right) + \left(\frac{a}{2^m} + \frac{a}{3^m}\right) + \left(\frac{a}{4^m} + \frac{a}{5^m} + \frac{a}{6^m} + \frac{a}{7^m}\right) + \\ \qquad + \left(\frac{a}{8^m} + \dots + \frac{a}{15^m}\right) + \left(\frac{a}{16^m} + \dots + \frac{a}{31^m}\right) + \dots, \end{cases}$$

затѣмъ замѣнить каждый членъ во всякой группѣ первымъ и бо́льшимъ по значенію членомъ, т.-е. сдѣлать

$$\frac{a}{1^m} + \frac{2a}{2^m} + \frac{4a}{4^m} + \frac{8a}{8^m} + \frac{16a}{16^m} + \dots,$$

то получимъ слѣдующую геометрическую убывающую прогрессію

$$a + \frac{a}{2^{m-1}} + \frac{a}{(2^{m-1})^2} + \frac{a}{(2^{m-1})^3} + \dots = \frac{a}{1-\frac{1}{2^{m-1}}} = \frac{2^{m-1}}{2^{m-1}-1}a.$$

Тѣмъ болѣе меньшая (1) серія должна быть сходящейся, и если, взявъ за первый пренебрегаемый членъ $\frac{a}{n^m}$, принять, для простоты, n за степень двухъ или вида $n=2^p$, то, исчисляя только часть (2) серіи, именно члены отъ $\frac{a}{1^m}$ до $\frac{a}{(2^p-1)^m}$, т.-е. точное число p группъ, мы получимъ ошибку менѣе суммы прогрессіи, имѣющей 1-й членъ $\frac{a}{2^{p(m-1)}}$ или $\frac{a}{n^{m-1}}$ и знаменатель $\frac{1}{2^{m-1}}$. Тогда будетъ

$$(3) \qquad (\text{при } n=2^p) \qquad \frac{a}{n^m} + \frac{a}{(n+1)^m} + \dots < \frac{2^{m-1}}{2^{m-1}-1}\,\frac{a}{n^{m-1}}.$$

Теперь допустимъ, что въ нашей серіи $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$, гдѣ отношеніе u_{n+1} къ предыдущему u_n стремится къ 1, при увеличеніи n, это отношеніе при очень большомъ значеніи n никогда не превзойдетъ $\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$, гдѣ m — значеніе конечно, произвольно выбранное, но выше 1. Члены этой серіи убываютъ такъ же скоро или въ такомъ же большомъ отношеніи, какъ члены серіи типа (1), въ которой придано искомое значеніе m'у и членъ $\frac{a}{n^m}$ соотвѣтствуетъ u_{n+1}. Слѣдовательно, наша серія будетъ сходящейся; достаточно взять въ (3) $a=n^m u_{n+1}$, чтобы первая часть этого неравенства (3), которое начнется тогда съ u_{n+1}, сдѣлалась равной или больше выраженія

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = R_n.$$

Поэтому ошибка R_n, получаемая въ суммѣ $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$, если вычислять лишь $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, будетъ имѣть по второй части (3), гдѣ $a = n^m u_{n+1}$, свой высшій предѣлъ даннымъ по формулѣ

$$(4) \qquad \text{(при } n = 2^p) \qquad R_n < \frac{2^{m-1}}{2^{m-1} - 1} (n u_{n+1})$$

Напротивъ, когда въ разсматриваемой серіи $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ отношеніе члена u_{n+1} къ u_n достигаетъ величины $1 - \frac{1}{n}$ или, *тѣмъ болѣе,* величины $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$, гдѣ показатель m меньше 1, то серія расходящаяся, потому что, хотя ея члены и могутъ стремиться къ нулю, но сумма их безпредѣльно увеличивается. Дѣйствительно, такіе члены убываютъ не быстрѣе, чѣмъ въ серіи, назыв. *гармонической*,

$$(5) \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

гдѣ отношеніе n'аго члена къ $n-1$-му равняется вполнѣ $1 - \frac{1}{n}$. Группируя ихъ, какъ выше, только откинувъ первый членъ, т.-е. дѣлая

$$\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

и затѣмъ замѣняя въ каждой группѣ всѣ члены послѣднимъ изъ той же группы, мы получимъ меньшее выраженіе

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \frac{16}{32} + \cdots,$$

составленное, какъ видимъ, изъ безконечнаго числа членовъ, всегда равныхъ $\frac{1}{2}$. Поэтому эта серія и *тѣмъ болѣе* гармоническая серія (5) съ членами, не быстрѣе убывающими, чѣмъ члены данной серіи, — серіи расходящіяся.

Что касается до серій съ членами, изъ которыхъ одни положительны, другіе — отрицательны, то извѣстно, что, если онѣ сходятся при своихъ членахъ съ однимъ и тѣмъ же знакомъ, то тѣмъ скорѣе онѣ сходящіяся при членахъ съ разными знаками, такъ какъ абсолютная величина выраженія

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}$$

будетъ еще менѣе замѣтна, а ошибка R_n, получаемая отъ остановки вычисленія на членѣ u_n, будетъ еще ближе подходить къ нулю, чѣмъ въ серіи съ членами одного знака.

Но извѣстно и то, что этой сходимости абсолютной суммы членовъ не требуется для того, чтобы данная серія стремилась къ предѣлу. Напр., *всякая серія съ убывающими и альтернативно положительными и отрицательными членами сходится, разъ ея послѣдовательные члены неопредѣленно приближаются къ нулю.* Дѣло въ томъ, что выраженіе $u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}$, состоя тогда изъ одного или двухъ членовъ, дѣлается по желанію положительнымъ или отрицательнымъ, такъ какъ, если написать

$$(u_{n+1}+u_{n+2})+(u_{n+3}+u_{n+4})+\ldots,$$

исключивъ послѣдній членъ, если p нечетное число, то всѣ группы въ скобкахъ будутъ ариѳметическими разностями того же знака, что u_{n+1}, тогда какъ, если, наоборотъ, отдѣлить членъ u_{n+1} и иногда также членъ u_{n+p} и написать

$$(u_{n+2}+u_{n+3})+(u_{n+4}+u_{n+5})+\ldots,$$

то всѣ группы, будучи ариѳметическими разностями, будутъ имѣть знакъ u_{n+2} и, слѣдовательно, обратный предыдущему. Такимъ образомъ искомое выраженіе можетъ произвольно мало разниться отъ нуля (при $n=$ очень большому числу) и серія вполнѣ будетъ сходиться. Даже болѣе, если p безпредѣльно увеличивается, такъ что можно предположить $u_{n+p}=0$, то выраженіе $u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots$ дѣлается ошибкой R_n, получаемой отъ вычисленія только $u_0+u_1+\ldots+u_n$, и то же самое разсужденіе, которое позволяетъ написать R_n подъ двумя формами

$$(u_{n+1}+u_{n+2})+(u_{n+3}+u_{n+4})+\ldots,$$
$$u_{n+1}+(u_{n+2}+u_{n+3})+(u_{n+4}+u_{n+5})+\ldots,$$

показываетъ, съ одной стороны, что R_n имѣетъ знакъ u_{n+1}, а съ другой стороны, что разность R_n-u_{n+1} имѣетъ обратный знакъ и что эта ошибка R_n заключается между 0 и первымъ пренебрегаемымъ членомъ u_{n+1}.

Примѣромъ всего этого можетъ служить серія, имѣющая члены, которые я назову черезъ $a,\ -b,\ c,\ -d,\ e,\ -f,\ g,\ldots$ и которые по абсолютной величинѣ $a,\ b,\ c,\ d,\ldots$ очень незначительны и довольно правильно убываютъ для того, чтобы эти послѣдовательныя уменьшенія $a-b,\ b-c,\ c-d,\ d-e,\ldots$ могли быть во взаимныхъ отношеніяхъ, очень мало отличающихся отъ единицы. Дѣйствительно, если разсмотрѣть эти отношенія

$$\frac{a-b}{b-c},\quad \frac{c-d}{d-e},\quad \frac{e-f}{f-g},\ldots$$

вплоть до послѣдняго, безконечно удаленнаго, которое образовано изъ членовъ серіи крайне малыхъ или незамѣтныхъ, и если сложить соот-

вѣтственно съ одной стороны всѣ числители и съ другой всѣ знаменатели, то получится новое отношеніе

$$\frac{a - b + c - d + e - f + \ldots}{b - c + d - e + f - g + \ldots},$$

которое будетъ заключаться по извѣстной теоремѣ*) между самымъ большимъ и самымъ малымъ изъ всѣхъ данныхъ отношеній и, слѣдовательно, замѣтно будетъ равняться, какъ и они, единицѣ. Но если назвать черезъ S величину $a - b + c - d + \ldots$ серіи (откуда $b - c + d - e + f - \ldots = a - S$), то получимъ

$$\frac{S}{a - S} = 1 \text{ или } S = \frac{a}{2}.$$

Итакъ *разсматриваемая серія $a - b + c - d + \ldots$ съ альтернативно-положительными и отрицательными членами, убывающими лишь очень мало отъ одного до другого, замѣтно равняется половинѣ своего перваго*

*) Эта теорема читается такъ. *Когда почленно складываютъ какое-либо число отношеній $\frac{b_1}{a_1} = q_1$, $\frac{b_2}{a_2} = q_2$, $\frac{b_3}{a_3} = q_3, \ldots$, $\frac{b_n}{a_n} = q_n$, имѣющихъ знаменателями a_1, $a_2, a_3, \ldots, a_n$ одного и того же знака, то получаемое отношеніе $\frac{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}$ заключается между наименьшимъ и наибольшимъ изъ данныхъ отношеній.*

Дѣйствительно, если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительныя и если назвать черезъ q наименьшее и черезъ Q наибольшее изъ этихъ отношеній $q_1, q_2, \ldots, q_n$, то очевидныя равенства

$$b_1 = a_1 q_1, \quad b_2 = a_2 q_2, \ldots, \quad b_n = a_n q_n$$

дадутъ съ одной стороны

$$b_1 > a_1 q, \quad b_2 > a_2 q, \ldots, \quad b_n > a_n q,$$

и съ другой

$$b_1 < a_1 Q, \quad b_2 < a_2 Q, \ldots, \quad b_n < a_n Q,$$

и слѣдовательно, если сложить соотвѣтственно неравенства одного и того же смысла, то получимъ

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n > (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)q, \quad b_1 + b_2 + \ldots + b_n < (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)Q.$$

Раздѣлимъ ихъ на положительное количество $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, тогда будетъ

$$\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \begin{cases} > q, \\ < Q, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

Если бы $a_1, a_2, \ldots a_n$ были отрицательны, то ихъ можно было бы сдѣлать положительными, взявъ отношенія въ формѣ $\frac{-b_1}{-a_1}$, $\frac{-b_2}{-a_2}$, $\frac{-b_3}{-a_3}, \ldots$, $\frac{-b_n}{-a_n}$, и дать въ концѣ концовъ полученному результату $\frac{-(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}{-(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}$ требуемую формулу $\frac{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}$.

члена a, т.-е. среднему ариѳметическому двухъ предѣловъ 0 и a, между которомя сначала колеблется сумма этихъ послѣдовательныхъ членовъ. Это вполнѣ можно провѣрить на прогрессіи

$$1 - r + r^2 - r^3 + \ldots = \frac{1}{1+r},$$

если заставить знаменатель $-r$ стремиться къ -1, такъ какъ здѣсь абсолютная величина его предполагается меньше 1.

5. — Опредѣленіе длины дуги кривой.

Наиболѣе важное изъ геометрическихъ количествъ, къ которымъ приложимо понятіе о предѣлѣ, есть длина дуги кривой.

Мы всѣ имѣемъ непосредственное представленіе о томъ, что дуга кривой, т.-е. мѣсто, образованное безпрерывною послѣдовательностью точекъ и имѣющее въ каждой изъ этихъ точекъ какое-либо опредѣленное направленіе, есть общій предѣлъ направленій всѣхъ весьма малыхъ хордъ, концы которыхъ стремятся къ такой точкѣ; отсюда слѣдуетъ, что это направленіе, называемое *касательной*, различается произвольно-мало въ двухъ сосѣднихъ точкахъ кривой. Но представленіе о длинѣ подобной дуги въ томъ смыслѣ, что она выражена въ видѣка кого-либо числа прямолинейной единицы, хотя этого и нельзя приложить ни къ какой изъ ея частей, — получается гораздо труднѣй.

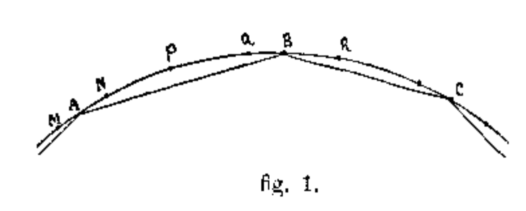


fig. 1.

Чтобы вычислить ее, надо разсмотрѣть лишь данную дугу $MC\ldots$ (fig. 1), какъ предѣльное положеніе перемѣнной линіи, имѣющей прямолинейныя, все болѣе и болѣе уменьшающія стороны и углы, все болѣе и болѣе дѣлающіеся открытыми; общая длина этихъ сторонъ стремится къ опредѣленному значенію; въ виду же принципа единства и безпрерывности, надо взять это значеніе за выраженіе длины дуги. Слѣдуетъ поэтому нарисовать многоугольную линію $MNPQR\ldots$ въ сосѣдствѣ съ кривой и такъ, чтобы направленіе вездѣ весьма мало отличалось отъ направленія кривой, что можетъ быть, напр., если прямая линія послѣдовательно будетъ касаться въ большемъ и большемъ числѣ точекъ съ кривой. И какъ только многоугольная линія $MNPQ\ldots$, такимъ образомъ полученная, будетъ имѣть достаточно много сторонъ для того, чтобы она вездѣ проходила отъ дуги на разстояніи, несравненно меньшемъ, чѣмъ какая-либо данная малая хорда AB, то ея часть, заключенная между A и B или, точнѣе, между A' (точка A' наиболѣе близкая изъ всевозможныхъ точекъ къ A) и такой же (къ B) точкой B', будетъ

отличаться отъ величины хорды AB только на очень слабую дробь*). Дѣйствительно, если проектировать эту часть на малую хорду AB, то различныя стороны $A'N$, NP, PQ, QB', которыя составляютъ ее, будутъ проектироваться почти въ истинную величину или имѣть съ своими проекціями отношеніе, почти равное 1, такъ какъ онѣ образуютъ съ AB только очень малые углы (какъ углы между AB и касательными въ A или въ B); отсюда слѣдуетъ по предыдущей теоремѣ (выноска на стр. 11), что линія $A'B'$, сумма числителей разсматриваемыхъ отношеній, имѣетъ съ своей проекціей на AB, сумму знаменателей, промежуточное, не менѣе сосѣднее съ 1, отношеніе, или что $A'B'$ превосходитъ свою всю проекцію на AB на относительно очень слабую часть своей длины. А такъ какъ эта проекція начинается въ очень сосѣдней отъ A точкѣ и кончается въ другой, очень сосѣдней отъ B, или сама не отличается отъ AB замѣтнымъ образомъ, то разсматриваемая часть $A'B'$ ломаной линіи можетъ представлять съ AB только разность, несравненно меньшую, чѣмъ AB, т.-е. равную произвольно малой части AB, тогда какъ и AB сама очень незначительна. Поэтому по мѣрѣ того, какъ стороны многоугольной линіи уменьшаются и сама она приближается къ данной дугѣ кривой, ея часть, названная здѣсь $A'B'$, можетъ измѣняться только въ крайне слабой пропорціи, а такъ какъ то же самое будетъ происходить и съ другими частями, соотвѣтствующими очень малымъ хордамъ, $BC,\ldots$, то вся многоугольная линія, концы которой будутъ или сдѣлаются въ предѣлѣ концами данной дуги, будетъ измѣняться въ своей всей длинѣ только на столь же малую часть этой длины, которая, очевидно, конечна, какъ разстояніе между двумя изъ ея точекъ, взятыхъ, сколь возможно, дальше другъ отъ друга. На самомъ дѣлѣ, сумма числителей, $A'B'$, $B'C',\ldots$, отношеній, почти равныхъ единицѣ и имѣющихъ знаменателями AB, $BC,\ldots$, образуетъ съ суммой знаменателей новое отношеніе, не менѣе равное 1.

Итакъ всѣ эти многоугольныя линіи, имѣющія очень малыя стороны, по длинѣ замѣтно не различаются, почему свойство, высказанное въ № 3, какъ необходимое и достаточное условіе для того, чтобы онѣ допускали предѣлъ,— вполнѣ принадлежитъ имъ. Длина дуги, слѣдовательно, тождественная этому предѣлу, есть вполнѣ опредѣленное количество.

Замѣтимъ еще, что, если вершины многоугольной линіи $MNPQ\ldots$, предлагаемой перемѣнной, все болѣе и болѣе сближаются другъ къ другу, то часть этой линіи, названная черезъ $A'B'$, стремится къ дугѣ AB, не заставляя свое отношеніе къ хордѣ AB никогда замѣтно отдаляться

*) A' и B', слѣдовательно, основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ *неподвижныхъ* точекъ A и B кривой на сосѣдія стороны MN и QR *перемѣнной* многоугольной линіи $MNPQ\ldots$, перпендикуляровъ, измѣряющихъ въ A и B разстоянія между этой линіей и кривой и очень малыя въ сравненіи съ AB.

отъ 1; мы будемъ имѣть $\frac{\text{дуга } AB}{\text{хорда } AB} = 1$ съ произвольно малой ошибкой, лишь только AB достаточно мало; отсюда слѣдуетъ теорема:

Во всякомъ отрѣзкѣ кривой, на которой направленіе касательной нигдѣ не измѣняется рѣзко отъ одной точки до другой, отношеніе какой-либо дуги къ ея хордѣ стремится къ 1, когда дуга стремится къ 0.

6. — Функціи.

Количества, разсматриваемыя въ математикѣ, раздѣляются на *постоянныя*, всегда сохраняющія свою величину, и *перемѣнныя*, послѣдовательно принимающія безконечный рядъ различныхъ значеній, безпрерывно, т.-е. постепенно уменьшающихся или увеличивающихся. Но иногда извѣстныя количества остаются одними и тѣми же во время измѣненій тѣхъ, которыя обыкновенно измѣняются, но ихъ величина можетъ быть взята произвольною, тогда какъ въ другомъ мѣстѣ имъ надо придавать всѣ эти значенія, вслѣдствіе чего эти количества то постоянны, то перемѣнны: такія количества наз. *параметрами*. Напр., когда разсматриваютъ кругъ, то координаты различныхъ точекъ этой кривой по отношенію къ системѣ двухъ прямоугольныхъ осей — *перемѣнныя* количества, тогда какъ координаты центра и радіусъ — *постоянныя*. Эти три послѣднія количества дѣлаются *параметрами*, если мы станемъ разсматривать на плоскости безконечность круговъ. Но отношеніе π ихъ окружностей къ діаметру, если предположить, что мы уже знаемъ π, будетъ всегда постояннымъ. Такое отношеніе, хотя и несоизмѣримое или не содержащее никакого точнаго числового выраженія, все-таки считается *простымъ числомъ* для того, чтобы выразить, что оно остается неизмѣняющимся, когда измѣняются употребляемыя физическія единицы или мѣры.

Но произвольно нельзя давать какія-угодно значенія всѣмъ разсматриваемымъ перемѣннымъ, такъ какъ существуютъ извѣстныя соотношенія между ними, безъ которыхъ вопросъ не имѣлъ бы смысла. Одни только извѣстныя перемѣнныя, называемыя *независимыми*, могутъ непосредственно получать произвольное значеніе, но находящееся между извѣстными предѣлами: это происходитъ напр. въ полуокружности AMB, когда абсцисса $OM' = x$, которая варьируетъ отъ OA' до OB', такъ какъ A' и B' суть основанія перпендикуляровъ — крайнихъ ординатъ AA' и BB'. Какъ только выберутъ значенія для этихъ (независимыхъ) перемѣнныхъ, другія перемѣнныя уже опредѣлены этимъ самымъ; это означаетъ, что они *функціи* первыхъ или что они зависятъ отъ нихъ: поэтому-то ихъ и называютъ *зависимыми перемѣнными* или *функціями*. Такова въ полуокружности

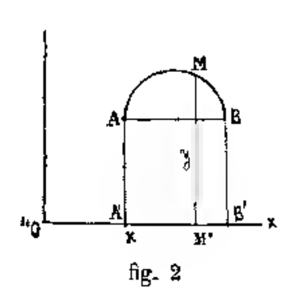


fig. 2

AMB какая-либо ордината $MM' = y$, которая можетъ быть построена только тогда, когда дана абсцисса $OM' = x$; тогда говорятъ, что ордината y есть функція независимаго перемѣннаго x.

Если хотятъ показать какія-либо функціи перемѣнныхъ $x, y, z, t, \ldots$, то пишутъ бyквы $f, F, \varphi, \psi, \ldots$, передъ $x, y, z, t, \ldots$, отдѣленными другъ отъ друга запятой и заключенными въ скобки; такъ $f(x)$, $F(x, y, z)$ означаютъ двѣ функціи, зависящія первая отъ x, а вторая отъ x, y, z. Чтобы выразить особенныя значенія функцій, когда x, y, z примутъ специальныя значенія, выражающіяся черезъ $x = a$, $y = b$, $z = c$, пишутъ $f(a)$, $F(a, b, c)$. Такимъ образомъ равенство или *соотношеніе*, какъ $y = f(x)$ будетъ читаться: *y равняется f x'а* и будетъ выражать, что y здѣсь извѣстная функція, обозначенная черезъ f, количества x.

Случается иногда придавать перемѣнному x, имѣющему функціей $y = f(x)$, значенія, опредѣляемыя функціей, $\varphi(t)$, третьяго перемѣннаго t: это первое перемѣнное $x = \varphi(t)$ есть, заразъ, функція по отношенію къ t и независимое перемѣнное по отношенію къ y. Тогда говорятъ, что $y = f(x)$ есть *функція функціи*. Если же въ функціи $u = f(x, y, z)$ нѣсколькихъ перемѣнныхъ послѣднія получаютъ свои значенія $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $z = \varphi_3(t)$ въ зависимости отъ другого перемѣннаго t, то u или $f(x, y, z)$ называютъ *сложной функціей*.

7. — Главные способы представленія функцій въ пространствѣ: обратныя функціи, функціи точки и т. д.

Разсмотрѣніе пространства и фигуръ, могущихъ быть въ немъ, доставитъ намъ нѣсколько примѣровъ функцій, столь общихъ и въ столь часто встрѣчающейся формѣ, что весьма возможно принять ихъ за *типы* для *представленія* всѣхъ функцій.

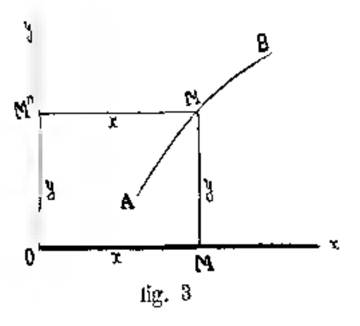


fig. 3

Прежде всего замѣтимъ, что всякая кривая AB, отнесенная къ системѣ двухъ прямоугольныхъ осей Ox и Oy и имѣющая точку M съ абсциссой $OM' = x$ и ординатой $OM'' = y$, выражаетъ извѣстную функцію; такъ какъ линіи не обладаютъ шириной, то прямая $M'M$ пересѣкается съ дугой AB лишь въ точкѣ M или, сказать точнѣе, въ изолированныхъ точкахъ, изъ которыхъ каждая, съ своей ординатой y, занимаетъ вполнѣ опредѣленное мѣсто на *вѣтви* кривой, если только дана абсцисса $OM' = x$. Поэтому-то y = извѣстной функціи, $f(x)$, перемѣннаго x.

Наоборотъ, если дана какая-либо функція, $y = f(x)$, какого-либо перемѣннаго, то, взявъ единицу длины, всегда можно откладывать последовательно на Ox абсциссы, равныя всѣмъ значеніямъ x, отрица-

тельнымъ и положительнымъ, при которыхъ существуетъ функція $f(x)$, и каждый разъ при этомъ чертить параллельно Oy ординату, равную (по значенію и знаку) величинѣ, соотвѣтствующей $f(x)$. Вторые концы этихъ ординатъ составятъ рядъ точекъ, способный *начертить* и даже, въ данномъ случаѣ, *графически* представить всѣ величины этой функціи. Подобный рядъ, очевидно безъ ширины, есть не что иное, какъ кривая, если функція $f(x)$ обладаетъ обыкновенными свойствами безпрерывности, рѣчь о которыхъ будетъ далѣе. Такимъ образомъ всякой функціи одного перемѣннаго соотвѣтствуетъ какая-либо плоскостная кривая.

Всякой же кривой AMB, отнесенной къ двумъ осямъ Ox и Oy, соотвѣтствуетъ не одна функція $y=f(x)$, но двѣ функціи. Дѣйствительно, если мы примемъ Oy за ось абсциссъ, то абсцисса OM' тотчасъ сдѣлается ординатой MM'', тогда какъ предыдущая ордината $M'M=OM''$ сдѣлается абсциссой. Кривая AB, разсматриваемая въ положеніи, которое она занимаетъ по отношенію къ Oy, какъ она дѣлала это только что по отношенію къ Ox, выражаетъ вторую извѣстную функцію $x=\varphi(y)$, въ которой одновременныя значенія функція и перемѣннаго тѣ же самыя, что и въ предыдущей $y=f(x)$, но съ перемѣной ролей x и y. Эта функція φ, разнящаяся отъ предыдущей f, какъ разнятся двѣ фигуры $OM''MB$ и $OM'MB$, называется *обратной функціей* f'а.

Представленіе функція плоскостной кривой не составляетъ ни малѣйшаго труда, когда функція зависитъ отъ одного лишь перемѣннаго. Но оно можетъ быть примѣнено и къ тому случаю, когда перемѣнныхъ нѣсколько и когда каждое изъ нихъ можно взять послѣдовательно за абсциссу и ее только тогда измѣнять. Но можно было бы посредствомъ болѣе или менѣе продолжительнаго рѣшенія узнавать, какимъ образомъ варіируетъ функція, когда нѣсколько перемѣнныхъ измѣняются заразъ, почему и предпочитаютъ искать способъ представленія, гдѣ бѣглымъ взглядомъ можно было бы узнать совокупность всѣхъ ея значеній. Геометрія знаетъ еще функцію двухъ перемѣнныхъ, функцію z формы $z=f(x,y)$, такъ какъ всякая поверхность, отнесенная къ системѣ координатъ, есть выраженіе такой формы.

Представимъ себѣ напр. горизонтальную плоскость xy'овъ каждая точка P которой будетъ, очевидно, опредѣлена (или можетъ быть построена безъ неточности) посредствомъ двухъ координатъ $OP'=x$ и $P'P=y$. Если изъ этой точки P проведемъ параллельную Oz линію PM, которая встрѣтитъ данную поверхность SS', то послѣдняя, не имѣя толщины, будетъ имѣть съ ней общаго только одну точку M или, говоря точнѣе, получатся двѣ точки, изолированныя другъ отъ друга и принадлежащія къ столькимъ же *скатамъ* поверхности, которыми и будутъ вполнѣ опредѣляться. Ихъ же ордината или высота z, PM напр., будетъ, очевидно, какой-либо функціей перемѣнныхъ x и y. Наоборотъ всякая функція $f(x,y)$ этихъ двухъ перемѣнныхъ позволитъ по-

строить при каждой системѣ значеній x и y, относящихся къ точкѣ, какъ P, ординату $z = f(x, y)$, такую, какъ PM; конецъ M будетъ мало-по-малу перемѣщаться, когда x и y будутъ варіировать, такъ что образуется геометрическое мѣсто безъ толщины, но распростертое, какъ соотвѣтствующая часть на плоскости xy'овъ, въ длину и ширину, если только функція $f(x, y)$ будетъ обладать обыкновенными свойствами безпрерывности. Итакъ всякую функцію двухъ перемѣнныхъ представляетъ извѣстная поверхность.

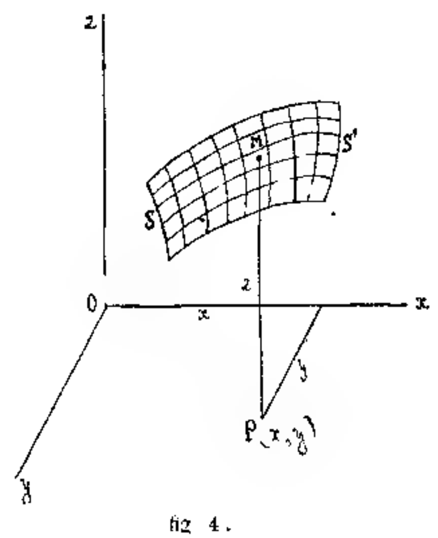


fig 4.

Если же перемѣнныхъ три, то чистая геометрія не въ состояніи представить функцію въ удобной формѣ. Но чтобы имѣть еще довольно простое выраженіе, достаточно къ представленію о пространствѣ прибавить весьма обыкновенное *физическое* понятіе, понятіе о *плотности* матеріи. Тогда можно прибѣгнуть къ представленію объ однообразной пульверизаціи и разнообразному разсѣиванію плотнаго вещества, т.-е. къ представленію о раздѣленіи матеріи на равныя и безконечно-малыя части, зависящемъ отъ болѣе или менѣе сильнаго разсѣиванія этихъ частицъ въ пространствѣ. Тогда плотность въ различныхъ точкахъ будетъ числомъ, пропорціональнымъ количествамъ этого вещества, содержащимся въ шарахъ, описанныхъ однимъ и тѣмъ же очень малымъ даннымъ радіусомъ вокругъ этихъ точекъ, взятыхъ за центры. Для большей простоты и точности принимаютъ матерію за безпрерывную, т.-е. за раздѣленную на очень малыя части во всемъ занимаемомъ ею пространствѣ, и представляютъ, что радіусъ маленькаго шара уменьшается до нуля, почему за плотность берутъ тогда предѣлъ отношенія количества, содержащагося въ шарѣ, который имѣетъ разсматриваемую точку за центръ, къ аналогичному количеству вещества, содержащемуся въ шарѣ, центромъ котораго будетъ извѣстная, выбранная точка.

Благодаря этой идеѣ о плотности, получается удобное выраженіе какой-либо функціи $\rho = f(x, y, z)$ трехъ перемѣнныхъ x, y, z, представляющей пространство, отнесенное къ тремъ прямоугольнымъ осямъ x, y, z и подразумѣвающей, послѣ опредѣленія системъ значеній x, y, z, при которыхъ существуетъ функція $f(x, y, z)$, что мѣста, координаты которыхъ x, y, z равны этимъ системамъ значеній, заняты веществомъ такой *плотности*, которая соотвѣтствуетъ каждый разъ функціи $\rho = f(x, y, z)$. Такъ какъ пульверизація и соотвѣтствующее разсѣива-

ніе достаточно плотнаго вещества даютъ матеріи какой угодно плотности, то ничто не мѣшаетъ на самомъ дѣлѣ представлять искомую плотность въ каждой точкѣ (x, y, z) пространства въ видѣ функціи ϱ.

Это количество ϱ, различныя значенія $f(x, y, z)$ которой могутъ быть приложимы къ различнымъ точкамъ (x, y, z) пространства, было названо Ламэ *функціей точки*. Плотность, которая предполагаетъ только наиболѣе упрощенное обозначеніе тѣла, въ дѣйствительности обладающаго конкретными свойствами, есть, по отношенію къ его натурѣ, самая простая изъ этихъ функцій, но механика и физика разсматриваетъ множество подобныхъ величинъ, какъ напр. температуру, напряженіе тяжести, и т. д. Всѣ явленія природы, происходящія въ различныхъ частяхъ пространства, всегда воплощаются въ извѣстное число функцій точки, если онѣ могутъ быть подчинены какому-либо математическому выраженію.

Можно представить матерію, очень тонкую или безъ замѣтной толщины, на плоскости, содержащей двѣ прямоугольныя координатныя оси x и y, и придать ей въ различныхъ точкахъ (x, y) плотность, описавъ вокругъ этихъ точекъ, какъ центровъ, однимъ и тѣмъ же очень малымъ радіусомъ неопредѣленно уменьшающіеся круги, которые будутъ окружать количества матеріи, имѣющія между собой какія-либо предѣльныя отношенія, эти самыя выраженія этихъ плотностей ϱ. Слѣдовательно, не выходя въ нѣкоторомъ родѣ изъ плоскости, возможно представить посредствомъ подобнаго отрѣзка пространства всякую функцію $\varrho = f(x, y)$ двухъ перемѣнныхъ. Но оставляя лишь одну координатную ось, напр. ось x'овъ, и представляя себѣ отрѣзокъ матеріи безъ замѣтной толщины и ширины, но равныя, очень малыя протяженія котораго имѣли бы между собой предѣльныя отношенія, значенія ихъ плотностей, выражающіяся какой-либо функціей x'а, — можно было бы точно такъ же получить родъ представленія всякой функціи $\varrho = f(x)$ одного перемѣннаго.

Но предположимъ, что кромѣ 3 независимыхъ перемѣнныхъ вводится еще четвертое t. Но и тогда еще можно, если взять продолжительность или время, самое простое, пожалуй, понятіе послѣ понятія о пространствѣ, выражать какую-либо функцію $\varrho = f(x, y, z, t)$ четырехъ перемѣнныхъ. Для этого надо представить себѣ, что, взявъ какую-либо единицу времени, опредѣляютъ или характеризуютъ всякую эпоху, т.-е. всякую часть продолжительности, ея разстояніемъ отъ опредѣленной, очень древней эпохи, или, въ другихъ словахъ, временемъ, вообще очень продолжительнымъ, протекшимъ отъ этой неподвижной эпохи до разсматриваемой. Но для того, чтобы не производить дѣйствій надъ столь громадными числами, могущими превосходить всякій предѣлъ, можно поступать такъ, какъ мы дѣлали (стр. 2) съ разстояніемъ, опредѣляющимъ *положеніе* точки на прямой: можно изъ этихъ чиселъ вычитать ихъ общую часть, именно интервалъ, заключенный между первоначально

выбранной начальной эпохой и одной изъ разсматриваемыхъ эпохъ, взятой за *начало;* такимъ образомъ придется характеризовать каждую эпоху лишь промежуткомъ времени отъ этого начала, положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, считается ли эта эпоха послѣ начала или до начала. Этотъ положительный или отрицательный интервалъ, отдѣляющій *начало* отъ разсматриваемой эпохи, называется просто *временемъ* и обыкновенно представляется буквой t.

Теперь представимъ себѣ вещество, которое вмѣсто того, чтобы сохранять въ каждой точкѣ (x, y, z) пространства одну и ту же *плотность* въ различныя послѣдовательныя мгновенія t, постоянно измѣнялось бы, потому ли, что оно съ каждымъ мгновеніемъ производится или уничтожается на одномъ мѣстѣ, или потому, что (что проще) оно имѣетъ измѣненія матеріи въ какомъ-либо количествѣ между разсматриваемой частью пространства и той, которою еще не занимаются. Ясно, что при такихъ условіяхъ плотность ϱ способна получать какія угодно значенія, не только въ зависимости отъ x, y, z, но также и отъ t, и что, слѣдовательно, разсматриваемая матерія можетъ быть представляема, въ каждомъ мѣстѣ и каждое мгновеніе, всякой функціей $\varrho = f(x, y, z, t)$ четырехъ перемѣнныхъ. Но иногда эта функція можетъ быть въ зависимости и не отъ четырехъ, но отъ меньшаго числа перемѣнныхъ; такъ простая вещественная точка, то болѣе, то менѣе сжимающаяся, можетъ быть представлена въ видѣ $\varrho = f(t)$.

Наконецъ идея о измѣненіи состоянія на мѣстѣ приводитъ къ идеѣ о такъ называемомъ *движеніи* или постоянномъ перемѣщеніи фигуры съ тремя измѣреніями, предполагаемой безформенной; это движеніе можетъ представляться одновременно тремя какими-либо функціями

$$u = f_1(x, y, z, t), \quad v = f_2(x, y, z, t), \quad w = f_3(x, y, z, t),$$

четырехъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z, t; это можетъ быть сдѣлано, не прибѣгая ни къ какимъ другимъ *экстра-геометрическимъ* понятіямъ, какъ только къ понятію о времени. Предположимъ, что эта фигура состоитъ изъ безконечности подвижныхъ точекъ, которыя въ извѣстный моментъ или, скорѣе, въ извѣстномъ, реальномъ или фиктивномъ, состояніи занимаютъ различныя (x, y, z) положенія пространства: согласившись отнынѣ опредѣлять или различать каждую изъ нихъ ея координатами x, y, z въ этомъ специальномъ положеніи, предположимъ, что онѣ произвольно перемѣщаются, все же постоянно будучи опредѣляемы координатами. Если назвать черезъ u, v, w либо новыя координаты одной изъ нихъ (x, y, z) въ какую-либо эпоху t, либо конечныя увеличенія, положительныя или отрицательныя, могущія быть полученными координатами съ значеній, называемыхъ *первоначальными*, x, y, z, — то станетъ ясно, что въ томъ и другомъ случаѣ u, v, w могутъ быть какими-либо тремя функціями не только времени t, но и первоначальныхъ координатъ x, y, z, измѣняющихся вмѣстѣ съ точкой. Итакъ гра

функціи четырехъ независимыхъ перемѣнныхъ всегда выражаютъ извѣстное движеніе различныхъ точекъ фигуры, имѣющей три измѣренія и безформенной.

Если же, когда всѣ точки фигуры обратятся въ одну лишь, не надо различать ихъ, то остается только одно перемѣнное t; называя тогда черезъ x, y, z, вмѣсто u, v, w, координаты мобиля, мы получимъ три выраженія формы

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t),$$

для представленія всѣхъ измѣненій движенія, т.-е., съ одной стороны, *траэкторіи* или мѣста послѣдовательныхъ положеній мобиля, а съ другой — частнаго способа, какимъ образуется эта кривая. Такимъ образомъ, черченіе кривой какою-либо движущейся точкой даетъ прекрасное представленіе системы трехъ какихъ-либо функцій одного и того же независимаго перемѣннаго. Кромѣ того эти функціи обращаются въ двѣ, $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, если кривая находится въ плоскости xy, и въ одну $x=f_1(t)$, если мобиль перемѣщается по оси x'овъ.

Наконецъ, предположимъ, что точки разсматриваемой фигуры образуютъ рядъ и могутъ, слѣдовательно, отличаться другъ отъ друга только однимъ перемѣннымъ α, которое будетъ напр. ихъ разстояніемъ отъ одной изъ нихъ, измѣряемымъ, какъ и длина ряда, въ извѣстномъ частномъ состояніи (реальномъ или фиктивномъ) этой фигуры. Тогда координаты x, y, z въ какое-либо мгновеніе будутъ функціями t и α'ы, т.-е будемъ имѣть

$$x=f_1(t,\alpha), \quad y=f_2(t,\alpha), \quad z=f_3(t,\alpha)$$

для представленія или, при варіированіи t, траэкторіи какой-либо изъ точекъ ряда, или, при варіированіи α, мѣста этихъ точекъ въ данный моментъ t, т.-е. новой формы, которую приметъ этотъ рядъ въ моментъ t. Совокупность всѣхъ этихъ траэкторій и всѣхъ рядовъ точекъ, послѣдовательно образуемыхъ первоначальнымъ рядомъ, дастъ, очевидно, родъ сѣти или ткани, безконечно-тонкой, но съ длиной и шириной, т.-е. поверхность. Обратно, на всякой поверхности можно представить себѣ двѣ системы кривыхъ, изъ которыхъ однѣ будутъ траэкторіями ряда точекъ, эти траэкторіи послѣдовательно будутъ пересѣкаться съ каждой изъ другихъ кривыхъ. Слѣдовательно, три функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ представляютъ поверхность, образованную извѣстнымъ способомъ посредствомъ даннаго ряда точекъ

8. — Раздѣленіе функцій, съ точки зрѣнія ихъ исчисленія, на алгебраическія и трансцендентныя различныхъ видовъ.

Кромѣ графическаго представленія функцій необходимо умѣть вычислять ихъ значенія, конечныя или приближенныя, посредствомъ надлежащихъ дѣйствій, производимыхъ надъ постоянными количествами вопроса, которыя должны подразумѣваться извѣстными, и надъ неза-

висимыми перемѣнными. Такимъ образомъ если, для простоты, заставить варіировать только одно перемѣнное, а съ другой стороны считать при вычисленіяхъ, данными при которыхъ были бы единственно другія перемѣнныя или постоянныя, за истинныя постоянныя лишь ихъ результаты, то всякая данная функція будетъ одной изъ слѣдующихъ категорій:

1) или эта функція, которую я назову черезъ y, будетъ вычисляться посредствомъ предѣльнаго числа алгебраическихъ дѣйствій (сложеніе; вычитаніе, умноженіе, дѣленіе и извлеченіе корня), что происходитъ, когда она опредѣляется алгебраическимъ уравненіемъ, рѣшаемымъ по общей формулѣ вродѣ формулъ уравненій первой и второй степени и имѣющимъ за коэффиціенты полиномы, состоящіе изъ цѣлыхъ степеней x, x^2, x^3,. . перемѣннаго x;

2) или вычисленіе этой функціи y потребуетъ безконечности такихъ дѣйствій, хоть бы эта функція и была корнемъ какого-либо алгебраическаго уравненія, имѣющаго коэффиціенты-полиномы по x, но не рѣшаемаго при помощи радикаловъ,

и 3) не только вычисленіе y'а не можетъ быть произведено посредствомъ конечнаго числа дѣйствій, но и сама функція y не можетъ быть корнемъ алгебраическаго уравненія, имѣющаго коэффиціентами полиномы по x.

Въ первомъ случаѣ функція называется *явной алгебраической* или просто *алгебраической*, такъ какъ она явно представлена *алгебраическимъ выраженіемъ*, т.-е. совокупностью буквъ и чиселъ, выражающихъ количества и соединенныхъ знаками дѣйствій $+$, $-$, $\sqrt{}$, etc Подобная функція называется еще *раціональной*, если она выражаетъ корень уравненія первой степени и не содержитъ ни радикаловъ, ни дробныхъ показателей въ выраженіи, гдѣ встрѣчается x. Напротивъ она называется *ирраціональной*, когда въ ней фигурируютъ радикалы, входящіе при перемѣнномъ x. Когда она раціональна, то въ концѣ концовъ она выражается частнымъ отъ дѣленія одного полинома на другой, такъ какъ сложенія, вычитанія, умноженія, производимыя надъ алгебраическими дробями, въ результатѣ даютъ новую дробь. Такимъ образомъ всякая раціональная функція представляется въ видѣ *раціональной дроби* формы

$$\frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots}{a'x^n + b'x^{n-1} + c'x^{n-2} + \dots}$$

Наконецъ, если знаменатель этой дроби обращается въ постоянное, на которое дѣлятся коэффиціенты $a, b, c, \dots$ числителя, то дробь обращается въ

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots,$$

гдѣ фигурируютъ лишь признаки сложенія, вычитанія и умноженія: эта функція называется *цѣлой;* она называется еще *линейной,* когда она

лишь первой степени, какъ $y = Ax + B$, и представляется *прямой линіей*. Этотъ частный и очень простой случай, къ которому стараются отнести всѣ остальные, очевидно, характеризуется тѣмъ, что увеличеніе перемѣннаго влечетъ за собой одинаковое увеличеніе функціи, и тѣмъ, что увеличеніе функціи y пропорціонально увеличенію перемѣннаго.

Во второмъ общемъ случаѣ, функція y называется *неявной алгебраической*. Такимъ образомъ ее называютъ *алгебраической*, хотя никакое конечное алгебраическое выраженіе не можетъ представить совокупность ея значеній, или потому, что она обладаетъ свойствами, очень похожими на свойства алгебраическихъ явныхъ функцій (то, что алгебраическое уравненіе рѣшимо или нѣтъ алгебраически, не вліяетъ на самое важное изъ этихъ свойствъ), или потому, что рѣшеніе алгебраическихъ уравненій составляетъ въ алгебрѣ шестое и послѣднее дѣйствіе, чисто алгебраическое дѣйствіе, хотя и состоящее изъ пяти первыхъ, указанныхъ въ ариѳметикѣ. Кромѣ того коэффиціентамъ уравненія, опредѣляющаго y, можно придать цѣлую и раціональную по x форму, т.-е. форму простыхъ многочленовъ, такъ какъ, если бы эти коэффиціенты содержали знаменателей или радикалы, или даже неявныя алгебраическія функціи x'а, все же можно было бы не только избавиться отъ знаменателей, но даже уничтожить радикалы и неявныя функціи посредствомъ допускаемыхъ алгеброй исключеній.

Наконецъ функціи третьяго случая называются *трансцендентными* Менѣе сложныя изъ нихъ имѣютъ алгебраическое происхожденіе. Таковы напр.: 1) ирраціональныя, имѣющія несоизмѣримый показатель, какъ $x^{\sqrt{2}}$, которыя, заключаясь вмѣстѣ съ алгебраическими одночленными функціями въ одномъ и томъ же типѣ x^m, въ нѣкоторомъ родѣ представляютъ переходъ отъ алгебраическихъ функцій къ трансцендентнымъ; 2) сходящіяся серіи съ алгебраическими членами, сумма которыхъ не можетъ быть выражена конечнымъ числомъ равныхъ членовъ; 3) наконецъ и главнымъ образомъ, *экспонентныя (показательныя)* функціи e^x, a^x, о которыхъ рѣчь будетъ вскорѣ, и ихъ обратныя, *логариѳмическія* функціи, которыя пишутся какъ напр. $\lg x$, etc. Другія имѣютъ геометрическое происхожденіе. Самыя простыя изъ нихъ представляютъ кругъ и называются *круговыми* или *угловыми* функціями Это суть sinus, cosinus, tangens и cotangens; ихъ разсматриваетъ тригонометрія. Точно такъ же — ихъ обратныя arcussinus, arcuscosinus, arcustangens и arcuscotangens. Въ этомъ курсѣ онѣ также займутъ подобающее имъ мѣсто.

Но большая часть трансцендентныхъ функцій имѣетъ еще болѣе сложное происхожденіе. Въ это число можно включить почти всѣ функціи, представляющія явленія природы: такъ какъ познаніе ихъ приходитъ къ намъ изъ опыта надъ нѣкоторыми изъ этихъ феноменовъ или чаще изъ наблюденія, менѣе первоначальнаго и менѣе забываемаго, чѣмъ тѣ, которыя внушаютъ намъ основныя геометрическія или аналитическія идеи, то ихъ называютъ *эмпирическими функціями* Геометрамъ часто

удается выразить ихъ съ желаемымъ приближеніемъ, по крайней мѣрѣ, между довольно тѣсными предѣлами, или посредствомъ алгебраическихъ функцій, вычисляемыхъ затѣмъ непосредственно или посредствомъ экспонентныхъ или угловыхъ, которыя вычисляются при помощи обыкновенныхъ таблицъ логариѳмовъ, или даже иногда посредствомъ функцій, болѣе сложныхъ, для вычисленія которыхъ уже составляются особыя таблицы. Разсматриваемыя трансцендентныя функціи по большей части состоятъ изъ серій и, вообще, изъ предѣловъ алгебраическихъ или даже трансцендентныхъ выраженій болѣе элементарной природы. Во всякомъ случаѣ ихъ точное вычисленіе потребуетъ большого числа ариѳметическихъ дѣйствій, такъ что нѣтъ ничего удивительнаго, если, взявъ за данныя цѣлыя числа, мы не будемъ разставаться уже съ извлеченіемъ корня или дѣленіемъ, производимыми надъ десятичными знаками.

Чтобы дать понятіе о безконечномъ разнообразіи трансцендентныхъ функцій представимъ, что случайнымъ безпрерывнымъ движеніемъ мы нарисовали на плоскости, отнесенной къ Ox и Oy, кривую AMB. Разъ построенная, она опредѣляетъ, своими ординатами $PM = y$, соотвѣтствующими абсциссамъ $OP = x$, извѣстную, ясно опредѣленную, функцію y перемѣннаго x. Однако, очевидно, что эта функція въ своемъ происхожденіи, кромѣ нарисованія кривой, не подчинена никакимъ другимъ алгебраическимъ или даже геометрическимъ законамъ, которые могли бы опредѣлить ее; она не только трансцендентна, но и неподводима ни подъ одинъ типъ.

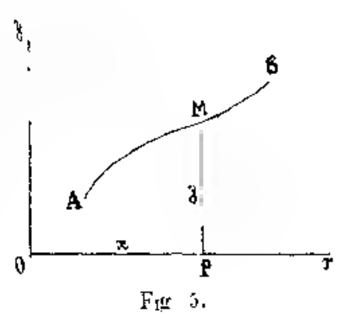


Fig. 5.

По аналогіи съ алгебраическими и трансцендентными функціями, когда несоизмѣримое число есть корень алгебраическаго уравненія съ соизмѣримыми коэффиціентами, — его величина называется *алгебраической ирраціональной* (*явной* или *неявной*, смотря по тому, можетъ ли она выражаться радикалами или нѣтъ); въ противномъ случаѣ, особенно когда это — π, отношеніе окружности къ діаметру, и основаніе $e = \lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ неперовыхъ логариѳмовъ, число называется *трансцендентнымъ*.

ГЛАВА II.

Постепенныя варіированія функціи. Разсмотрѣніе этого варіированія въ болѣе употребительныхъ функціяхъ: въ алгебраическихъ функціяхъ, *серіяхъ, дугахъ кривой etc.

9. – Постепенное варіированіе функцій; производная, отклоненіе или флюксія, которая выражаетъ это варіированіе.

Общее и природное свойство вещей, величина которыхъ измѣняется, есть *безпрерывность* или, точнѣе, *безпрерывность относительная* (т.-е. пропорціональная этой самой величинѣ): она высказывается въ томъ, что если какое-либо изъ перемѣнныхъ, отъ которыхъ зависятъ эти вещи, начинаетъ мѣняться, но въ весьма малой дроби конечнаго или долженствующаго быть разсматриваемымъ интервала, то и эти вещи сами измѣняются только въ сколь угодно малой дроби своихъ обыкновенныхъ или среднихъ значеній. Но при извѣстныхъ изолированныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, значеніяхъ, очевидно, указываемыхъ заранѣе самой природой разсматриваемой вещи, можетъ случаться и противоположное, т.-е. *прерывность* или рѣзкое измѣненіе вещей. Отсюда вытекаютъ два важныхъ свойства алгебраическихъ и даже трансцендентныхъ функцій, выражающихъ явленія природы, какія намъ были доступны до сего времени.

Первое высказывается въ томъ, что функціи *безпрерывны,* т.-е. таковы, что если увеличить ихъ перемѣнныя на достаточно малую разность, то онѣ сами будутъ испытывать увеличенія (положительныя или отрицательныя), меньшія всякой выражаемой дроби своего (конечнаго) значенія и, слѣдовательно, всякой другой неподвижной величины, кромѣ нуля, опредѣленной впередъ и очень малой. Это свойство называется *безпрерывностью* функцій, но можно его называть еще *абсолютной безпрерывностью,* чтобы показать, что измѣненія здѣсь называются *малыми* по случаю ихъ абсолютныхъ величинъ и что здѣсь не разсматриваютъ ихъ отношенія къ самымъ функціямъ, величинѣ которыхъ вполнѣ пропорціональна выбранная единица измѣренія. Второе свойство характеризуется тѣмъ, что разсматриваемыя функціи измѣняются *постепенно,* т.-е. почти однообразно при очень слабыхъ увеличеніяхъ перемѣнныхъ или послѣдовательными степенями, тѣмъ менѣе неравными (если сравни-

вать одну изъ нихъ съ слѣдующей), чѣмъ меньше онѣ берутся. Въ другихъ словахъ: если перемѣнному x придадутъ какое-либо число n послѣдовательныхъ увеличеній, равныхъ h и дающихъ въ суммѣ весьма малую величину $H = nh$, то два послѣдовательныхъ частныхъ увеличенія, соотвѣтствующихъ h (положительному или отрицательному) функціи $y = f(x)$, будуть имѣть между собой отношеніе, почти равное единицѣ и стремящееся къ 1, когда n увеличивается или h становится все менѣе и менѣе. Дѣло въ томъ, что съ очень малымъ и постоянно одинаковымъ, каково бы ни было первоначально x, увеличеніемъ h перемѣннаго, одновременное увеличеніе,

$$k = f(x + h) - f(x),$$

y'а даетъ новую функцію x'а, но функцію, значенія которой крайне малы даже въ сравненіи въ h: очевидно, какъ мало бы ни было h, эта малая функція разсматривается въ такомъ же самомъ всемъ интервалѣ, какъ и предыдущая $f(x)$, поэтому принципъ *относительной* безпрерывности вещей, которыя обладаютъ ею, заставляетъ эти функціи измѣниться только на *незамѣтную часть* своего значенія па всякой, тоже незамѣтной, части этого всего интервала. Кромѣ того n послѣдовательныхъ значеній k, которыя содержитъ частный промежутокъ H, будутъ всѣ имѣть между собой отношеніе, почти равное 1, но особенно два рядомъ стоящихъ, когда при $n = \infty$ ихъ интервалъ h сдѣлается частью всего интервала, опять таки несравненно меньшаго, чѣмъ было H.

Разсмотрѣвъ это, выберемъ одно значеніе x'а, соотвѣтствующее почти $1/2$ разсмотрѣннаго интервала H, или, скорѣе, замѣтимъ интервалъ $1/2 H$ съ обѣихъ сторонъ какого-либо даннаго значенія x'а и назовемъ: 1) черезъ Δx всякое увеличеніе, положительное или отрицательное, меньше $1/2 H$ (по абсолютной величинѣ), получаемое x'омъ, начиная съ этой опредѣленной величины; 2) черезъ Δy одновременное увеличеніе y'а. Если взять очень большое число n частныхъ интерваловъ h, на которые дѣлится интервалъ H, то увеличеніе Δx можетъ быть измѣрено съ неопредѣленнымъ приближеніемъ (принимая h за единицу) и содержать эту мѣру какое-либо цѣлое число m разъ (положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по значенію увеличенія) съ остаткомъ, который можно отбросить. Что касается до Δy, то оно будетъ состоять, за исключеніемъ аналогичнаго остатка, изъ m увеличеній, почти равныхъ первому изъ увеличеній, т.-е. k или $f(x+h) - f(x)$. Принявъ n за достаточно большое число, будемъ имѣть (съ относительной ошибкой, тѣмъ менѣе замѣтной, чѣмъ Δx ближе будутъ къ нулю) $\Delta y = mk$ или $\Delta y = \frac{k}{h} \Delta x$, такъ какъ m выразитъ частное $\frac{\Delta x}{h}$. Итакъ, свойство *постепеннаго варіированія* заставляетъ сказать, что достаточно-малыя увеличенія Δy функціи *замѣтно пропорціональны увеличеніямъ Δx пере-*

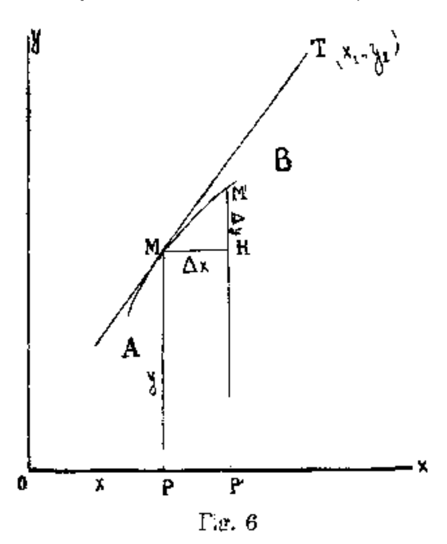
мѣннаго, или отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ такихъ *одновременныхъ* увеличеній уже не варіируетъ замѣтнымъ образомъ, если только Δx взять очень малымъ.

Иначе сказать, отношеніе,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

увеличенія функціи къ увеличенію перемѣннаго стремится къ опредѣленному предѣлу, если это послѣднее увеличеніе начинаетъ исчезать. Этотъ предѣлъ, откуда Δx исчезаетъ, но который зависитъ еще отъ x, есть, очевидно, новая функція x'а, къ которой также приложимъ законъ относительной *безпрерывности* вещей, какъ и къ $f(x)$ Эту функцію называютъ *производной* отъ $f(x)$. Ньютонъ обозначалъ ее той же буквой, что и предыдущую функцію, только ставилъ вверху точку. Лагранжъ замѣнилъ точку черточкой, показывающей порядокъ функціи. Напр. производная отъ y или отъ $f(x)$ будетъ писаться черезъ y' или $f'(x)$.

Производная y' можетъ получить другія названія, смотря по способу представленія, который употребленъ при функціи.



Фиг. 6

Если она, $y=f(x)$, представляется кривой AB, отнесенной къ системѣ координатъ Ox и Oy, то увеличенія Δx и Δy, получаемыя координатами x и y, когда переходятъ отъ M къ сосѣдней M', построятся, если провести соотвѣтственныя ординаты MP и $M'P'$ и раздѣлить ихъ горизонталью MH для выраженія того, что HM' есть увеличеніе высоты y между двумя точками M и M'. Горизонтальная проекція PP' или MH хорды MM', которая соединяетъточки M и M', очевидно выразитъ Δx, а возвышеніе HM' (положительное или отрицательное) M' надъ M выразитъ Δy. Отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не что иное, какъ $\frac{HM'}{MH}$ или то, что называется *отклоненіемъ* хорды MM'. Оно опредѣляетъ направленіе этой хорды, такъ какъ оно равно въ прямоугольномъ треугольникѣ MHM' тангенсу угла HMM', который образуется этой хордой съ горизонталью MH или съ параллельной осью Ox абсциссъ. Сказать, что это отношеніе уже не варіируетъ замѣтно, когда Δx, уже достаточно малое, стремится къ нулю или когда точка M' приближается къ M, это зна-

чить сказать, что всѣ очень малыя хорды, начинающіяся съ M имѣютъ почти одно и то же направленіе или что онѣ, будучи неопредѣленно продолжены, — стремятся къ извѣстной предѣльной прямой, къ *касательной* по мѣрѣ того, какъ M', ихъ вторая точка пересѣченія съ кривой, приближается къ первой M.

Итакъ, свойство кривыхъ — имѣть въ каждой своей точкѣ касательную или опредѣленное направленіе, есть не что иное, какъ геометрическая форма принципа послѣдовательнаго варіированія функцій и, слѣдовательно, принципа *относительной безпрерывности* вещей.

Такъ какъ всѣ отношенія $\frac{k}{h}$ частныхъ одновременныхъ увеличеній k и h, заключающихся въ Δy и въ Δx (и при этомъ какихъ угодно), все менѣе и менѣе отличаются отъ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, разъ Δx приближается къ нулю, то отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится сдѣлаться, въ предѣлѣ, отклоненіемъ не только хорды, но и *всей* ея дуги, которая поэтому въ моментъ своего уничтоженія безконечно близко подходитъ къ тому, чтобы сдѣлаться въ разныхъ своихъ частяхъ, сколь угодно многочисленныхъ, *единственнымъ* явно опредѣленнымъ направленіемъ; и, хотя хорда и дуга сходятся наконецъ въ точкѣ M, тѣмъ не менѣе, въ виду принципа безпрерывности, объясненнаго въ концѣ № 3, существуетъ кромѣ нихъ еще то *направленіе*, которое они образуютъ при своемъ уничтоженіи въ видѣ касательной MT. Поэтому говорятъ, что производная y' есть отклоненіе либо касательной MT, либо кривой въ точкѣ M; поэтому-то производную функцію можно назвать *отклоненіемъ функціи*.

Когда ось Oy составляетъ съ Ox острый уголъ, то отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и его предѣлъ y' перестаютъ быть при хордѣ MM' или при касательной MT тѣмъ, что называется *отклоненіемъ;* онѣ продолжаютъ тѣмъ не менѣе быть *угловымъ коэффиціентомъ*, постояннымъ отношеніемъ двухъ измѣняющихся увеличеній, которыя получаются вдоль разсматриваемой прямой, начиная съ ея точки, $M(x, y)$ напр., ея ординатою и абсциссою. Если x_1 и y_1 обозначаютъ *подвижныя* координаты касательной, т.-е. координаты какой-либо ея точки T, то эта касательная будетъ всегда выражаться черезъ уравненіе прямой,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = y' \quad \text{или} \quad y_1 - y = y'(x_1 - x).$$

Перейдемъ теперь къ другому способу представленія данной функціи и предположимъ, что она, выраженная черезъ $\rho = f(t)$, измѣряетъ въ разныя эпохи t количество измѣняющейся матеріи, помѣщенной въ данную часть пр—ства. Тогда ея увеличеніе $\Delta\rho$ (положительное или отрицательное), одновременное съ очень малымъ положительнымъ уве-

личеніемъ Δt перемѣннаго, выражаетъ количество матеріи, которое, въ продолженіе этого времени Δt, *войдетъ* снаружи въ нашу часть пр—ства, а отношеніе $\frac{\Delta \varrho}{\Delta t}$, постоянное, если предполагаютъ, что это втеканіе одинаково въ равные промежутки или пропорціонально времени, есть то, чѣмъ при этомъ простомъ условіи *однообразнаго втеканія* сдѣлалось бы увеличеніе $\Delta \varrho$ количества матеріи, если бы принять $\Delta t = 1$, т.-е. въ промежутокъ времени, равный избранной единицѣ измѣренія. Но по той же самой причинѣ существованія производной $\varrho' = f'(t)$, однообразіе это стремится дѣйствительно реализоваться во всѣ послѣдовательные очень малые (въ какомъ-либо числѣ m) промежутки времени, содержащіяся въ Δt, когда Δt безпредѣльно приближается къ нулю Итакъ производная $f'(t)$, предѣлъ отношенія $\frac{\Delta \varrho}{\Delta t}$, представляетъ, при опредѣленной эпохѣ t, *истеченіе* матеріи, *отнесенное къ единицѣ времени*. Точно такъ же, съ этой точки зрѣнія, она можетъ быть названа просто *измѣняемостью*, или, какъ ее назвалъ Ньютонъ, *флюксіей* (fluxion) функція ϱ; послѣднюю же Ньютонъ называлъ по противоположности, *une quantité fluente*, т.-е. текущимъ или измѣняющимся.

Флюксія, такимъ образомъ, есть выраженіе измѣненія, совершающагося на мѣстѣ, или, скорѣе, *быстроты* этого измѣненія въ данный моментъ. Но она становится выраженіемъ измѣненія мѣста или собственно называемаго движенія, когда функція, которую я обозначаю черезъ $x = f(t)$, есть координата x движущейся точки. Тогда производная представляетъ увеличеніе, которое испытала бы разсматриваемая координата въ единицу времени, или путь, который былъ бы пройденъ въ направленіи (въ смыслѣ) соотвѣтствующей координатной оси, если бы движущаяся точка продолжала двигаться во всю эту единицу времени такъ же, какъ она дѣлаетъ въ разсматриваемый моментъ. Производная принимаетъ названіе *скорости* и, очевидно, дѣлается выраженіемъ, даже мѣрой движенія. Собственно говоря, это и есть именно та скорость, которую Ньютонъ назвалъ *флюксіей:* при истеченіи жидкости (что можно взять за изображеніе движенія) она представляетъ въ каждый моментъ, по крайней мѣрѣ пропорціонально, *истеченіе* (le flux) или *уменьшеніе*, нѣкоторый объемъ (отнесенный къ единицѣ времени), который проходитъ тогда черезъ данное мѣсто, и ея названіе флюксія такимъ образомъ здѣсь вполнѣ оправдывается.

10. — Выраженіе, при помощи производной, отношенія конечныхъ увеличеній; постоянство функціи, когда производная уничтожается; теорема Ролля.

Изъ всего вышесказаннаго, очевидно, слѣдуетъ, что два конечныхъ (и уже замѣтныхъ) увеличенія, Δx и Δy, перемѣннаго x и его безпрерывной функціи $y = f(x)$ вытекаютъ всегда, какова на была ихъ

величина, изъ сложенія послѣдовательныхъ, очень малыхъ, положительныхъ или отрицательныхъ, увеличеній h_1, h_2, $h_3, \ldots, h_m$ для перемѣннаго и k_1, k_2, $k_3, \ldots, k_m$ для функціи, соотвѣтственныя отношенія которыхъ $\frac{k_1}{h_1}, \frac{k_2}{h_2}, \frac{k_3}{h_3}, \ldots, \frac{k_m}{h_m}$ стремятся, если число m увеличивается, а каждое увеличеніе уменьшается, къ различнымъ значеніямъ производной $f'(x)$, соотвѣтствующимъ значеніямъ перемѣннаго, промежуточнымъ между двумя разсматриваемыми x и $x + \Delta x$. Знаменатели h_1, h_2, $h_3, \ldots, h_m$ могутъ обладать всѣ однимъ и тѣмъ же знакомъ, такъ какъ ничто не мѣшаетъ взять ихъ даже равными. Но теорема, относящаяся къ почленному сложенію неравныхъ отношеній (стр. 11), уже примѣняемая нами нѣсколько разъ, показываетъ, что, если образовать двѣ суммы $\Delta y = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_m$ и $\Delta x = h_1 + h_2 + h_3 \ldots + h_m$, независимыя отъ m, то частное $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будетъ заключаться между самымъ малымъ и самымъ большимъ изъ отношеній $\frac{k_1}{h_1}, \frac{k_2}{h_2}, \ldots, \frac{k_m}{h_m}$ и, слѣдовательно, между двумя предѣльными значеніями, самымъ малымъ и самымъ большимъ, которыя получаетъ производная $f'(x)$, когда ея перемѣнное переходитъ отъ x къ $x + \Delta x$. Такимъ образомъ *отношеніе всего увеличенія безпрерывной функціи къ одновременному увеличенію ея перемѣннаго заключается между самымъ малымъ и самымъ большимъ изъ значеній производной въ тотъ промежутокъ, который представляется этимъ увеличеніемъ перемѣннаго.*

Изъ этого принципа слѣдуетъ: 1) *если, въ извѣстный промежутокъ производная f' положительна (при этомъ даже уничтожаясь при отдѣльныхъ значеніяхъ перемѣннаго),* то отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будутъ положительны или другими словами, *функція y варіируетъ въ томъ же смыслѣ, какъ и перемѣнное,* увеличиваясь, когда оно увеличивается, и уменьшаясь, когда оно уменьшается; 2) *если въ извѣстный промежутокъ, производная f' отрицательна (при этомъ могущая имѣть иногда даже нулевыя значенія), то функція y варіируетъ въ обратномъ смыслѣ своего перемѣннаго,* уменьшаясь, когда то увеличивается, и увеличиваясь когда то уменьшается, и 3) *если въ извѣстный промежутокъ производная постоянно уничтожается,* то отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ также уничтожаются или *функція y будетъ постоянной величиной.* Обратно, во всякій интервалъ, въ которомъ функція варіируетъ въ томъ же смыслѣ, какъ ея перемѣнное, производная, очевидно неспособная сдѣлаться отрицательной (такъ какъ предѣлъ отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ положителенъ), не можетъ ни въ какой части совершенно уничтожиться безъ того, чтобы не заставить y перестать варіировать, т. е. она положительна или уничтожается

только случайно. Точно такъ же во всякій интервалъ, когда функція варіируетъ въ обратномъ смыслѣ съ своимъ перемѣннымъ, производная очевидно отрицательна, хотя бы даже и могла уничтожиться при особыхъ значеніяхъ своего перемѣннаго. Что же касается тѣхъ случаевъ, когда функція, остается постоянной, то производная будетъ постоянно нулемъ, такъ какъ если будемъ имѣть $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, то и предѣлъ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будетъ постоянно равенъ 0. Такимъ образомъ существуетъ *очевидно связь между способомъ варіированія функціи и знакомъ ея производной.*

Отсюда слѣдуетъ, что *двѣ функціи u, v, производныя которыхъ u', v' равны при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго x, могутъ разниться только постоянной величиной.* Дѣйствительно ихъ разность $u - v$ очевидно варіируетъ, когда x получаетъ извѣстное увеличеніе Δx, на разность $\Delta u - \Delta v$ между соотвѣтствующимъ увеличеніемъ u и увеличеніемъ v, поэтому производная отъ $u - v$ есть предѣлъ отношенія $\frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$, или равна, слѣдовательно, количеству $u' - v'$, постоянно нулевому, когда производныя u' и v' двухъ разсматриваемыхъ функцій имѣютъ одно и то же значеніе. Такимъ, образомъ, разность $u - v$ вполнѣ обращается въ постоянное.

Въ формѣ, болѣе геометрической или болѣе конкретной, это предложеніе можно выразить въ слѣдующихъ словахъ: *ординаты $u = f(x)$ кривой опредѣлены, какъ только даны ея послѣдовательныя отклоненія $f'(x)$ въ видѣ функціи абсциссы x и сверхъ того дана частная ордината, соотвѣтствующая одной какой либо абсциссѣ, называемой начальной,* которую я назову черезъ x_0. Поэтому, если $v = F(x)$ есть ордината всякой кривой, имѣющей свои отклоненія $F'(x)$ равными даннымъ отклоненіямъ $f'(x)$ предположенной кривой, то двѣ функціи u и v, имѣющія постоянно равныя производныя, будутъ сохранять между собой безъ измѣненія свою первоначальную разность, нулевую по условію, когда соотвѣтствующее значеніе $F(x_0)$ функціи v будетъ именно такимъ же значеніемъ $f(x_0)$. Такимъ образомъ, при всякомъ значеніи x будемъ имѣть $v = u$ и будетъ возможна одна только кривая.

Но обратимся снова къ отношенію $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ одновременныхъ увеличеній, испытываемыхъ функціей $y = f(x)$ и ея перемѣннымъ x, когда это послѣднее переходитъ отъ x къ значенію $x + \Delta x$, отношенію, заключающемуся между самымъ малымъ и самымъ большимъ изъ значеній, которыя получаетъ въ этотъ промежутокъ производная y'. Обыкновенно эта производная y' безпрерывна; это означаетъ, что она переходитъ отъ наименьшаго своего значенія къ наибольшему или наоборотъ только при помощи незамѣтныхъ варіацій и, слѣдовательно, принимая всѣ промежуточныя значенія, заключающія и то, которое равно $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если назовемъ

черезъ $\Theta\Delta x$ дробь, соотвѣтственно взятую отъ Δx, или черезъ Θ какое-либо число, заключающееся между 0 и 1 (такъ что $x+\Theta\Delta x$ можетъ представлять, смотря по надобности, всѣ промежуточныя значенія между x и $x+\Delta x$), то значеніе x'а, которое получаетъ производную, равную разсматриваемому отношенію $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, можно написать черезъ $x+\Theta\Delta x$; тогда имѣемъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x+\Theta\Delta x) \quad \text{или} \quad \Delta y=f'(x+\Theta\Delta x)\Delta x.$$

Эта формула позволяетъ доказать одно важное предложеніе, которое гласитъ: *когда функція (безпрерывная въ извѣстный промежутокъ какъ и ея производная) проходитъ два раза черезъ одно и то же значеніе, то существуетъ кромѣ двухъ соотвѣтственныхъ значеній перемѣннаго еще третье, уничтожающее производную.* Дѣйствительно, можно назвать черезъ x и $x+\Delta x$ два значенія перемѣннаго, при которыхъ функція получаетъ разсматриваемую величину, и, если принять тогда $\Delta y=0$, то формула получитъ видъ $f'(x+\Theta\Delta x)=0$. Если бы производная $f'(x)$ не была безпрерывна, то теорема, откуда выведена эта формула, показала бы только, что самое малое и самое большое значёніе $f'(x)$'а будетъ заключать между собой нулевое отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и что, слѣдовательно, эта производная будетъ измѣнять свой знакъ при извѣстномъ значеніи (перемѣннаго), промежуточномъ между x и $x+\Delta x$.

Когда уравненіе остается уравненіемъ формы $f(x)=0$ съ первой частью $f(x)$, безпрерывной функціей, имѣющей и свою производную $f'(x)$ безпрерывною при всѣхъ конечныхъ значеніяхъ x'а, то два какихъ-нибудь значенія x'а, которыя заставляютъ $f(x)$ принять значеніе $=0$, содержатъ по крайней мѣрѣ одно, уничтожающее $f'(x)$. Такимъ образомъ, *въ числѣ двухъ послѣдовательныхъ корней разсматриваемаго уравненія $f(x)=0$ существуетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень производнаго уравненія $f'(x)=0$;* слѣдовательно, *въ числѣ двухъ послѣдовательныхъ корней производнаго уравненія $f'(x)=0$ не можетъ существовать болѣе одного корня разсматриваемаго уравненія $f(x)=0$.* Эта теорема Ролля позволяетъ, если умѣютъ рѣшить *производное уравненіе $f'(x)=0$*, выбрать корни уравненія $f(x)=0$, потому что корни уравненія $f'(x)=0$, заключающіеся по порядку величины между $-\infty$ и $+\infty$, образуютъ съ своими крайними значеніями $-\infty$ и $+\infty$ серію предѣловъ, въ каждомъ промежуткѣ которыхъ существуетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень уравненія $f(x)=0$.

Возвратимся еще къ формулѣ $\Delta y=f'(x+\Theta\Delta x)\Delta x$. Когда Δx стремится къ нулю, $f'(x+\Theta\Delta x)$ стремится къ $f'(x)$, называя черезъ ε исчезающее количество $f'(x+\Theta\Delta x)-f'(x)$, придемъ къ $\Delta y=[f'(x)+\varepsilon]\Delta x$: важное соотношеніе, которое мы разсмотримъ далѣе.

11. — Производныя аналитическихъ элементарныхъ функцій и ихъ простѣйшихъ комбинацій: суммы или разности, произведенія, частнаго. Прерывность частнаго, которое переходитъ черезъ безконечность.

Какъ примѣненіе предыдущаго курса, найдемъ производныя нѣкоторыхъ аналитическихъ, алгебраическихъ или трансцендентныхъ, функцій и ихъ простѣйшихъ комбинацій.

Но сначала, если разсмотрѣть сумму или разность $u+v-w$ функцій u, v, w, зависящихъ отъ извѣстнаго перемѣннаго x, то станетъ яснымъ, что ея увеличеніе, которое соотвѣтствуетъ увеличенію Δx этого перемѣннаго, будетъ суммой или разностью одновременныхъ увеличеній Δu, Δv, Δw этихъ функцій. Слѣдовательно, дѣля напр. $\Delta u + \Delta v - \Delta w$ на Δx и заставляя затѣмъ Δx стремиться къ 0, увидимъ, что *производная суммы или разности есть сумма или разность производныхъ всѣхъ членовъ, входящихъ въ это выраженіе.* Если какой-либо изъ членовъ былъ постоянной величиной, т.-е. не зависящей отъ разсматриваемаго перемѣннаго x, то варіація его и, слѣдовательно, производная его будутъ нулевыми. Но если одинъ изъ нихъ дѣлается этимъ перемѣннымъ x, то его производная, предѣльное частное Δx'а на Δx, очевидно будетъ равняться 1.

Разсматриваемый случай суммы $u+u+u+\ldots$ извѣстнаго числа a одинаковыхъ членовъ приводитъ къ случаю произведенія вида au, имѣющаго постоянный производитель. Ясно, что производная $u'+u'+u'+\ldots$ тогда будетъ au', даже когда a будетъ затѣмъ раздѣлено на цѣлое число, положительное или отрицательное, или сдѣлается дробью и, какъ предѣльный случай, какой угодно постоянной величиной, потому что, согласно самому опредѣленію произведенія au, это произведеніе, его увеличеніе и его производная будутъ раздѣлены на то же число. Такимъ образомъ *производная произведенія постояннаго множителя на перемѣнный множитель есть произведеніе постояннаго множителя на производную перемѣннаго.*

Перейдемъ теперь къ произведенію $y=uv$ двухъ перемѣнныхъ множителей u и v. Если x увеличить на Δx, u на Δu, v на Δv, y на Δy, то получимъ

$$\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\,\Delta v;$$

отсюда, раздѣливъ на Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\,\Delta v.$$

Наконецъ, заставляя Δx стремиться къ нулю, и, разсматривая въ предѣлѣ, мы увидимъ, что $\frac{\Delta u}{\Delta x}\,\Delta v$ сдѣлается $u'\Delta v$ или нулемъ. Мы бу-

демъ имѣть просто $y' = vu' + uv'$ и, дѣля на $y = uv$,

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

Такимъ образомъ, *производная произведенія, дѣленная на это произведеніе, есть сумма производныхъ ея множителей, дѣленныхъ каждая на свой соотвѣтствующій множитель.* Но ясно, что подобный законъ — общій, или годенъ для какого угодно другого числа множителей, такъ какъ если разложить сперва одинъ изъ двухъ разсматриваемыхъ множителей, v напр., на два новыхъ множителя w, w_1, — то то же самое разсужденіе позволитъ намъ замѣнить $\frac{v'}{v}$ черезъ $\frac{w'}{w} + \frac{w_1'}{w_1}$; и такимъ образомъ можно поступать далѣе съ новымъ раздвоеніемъ слѣдующаго множителя. Поэтому, вообще, если $y = uvw\ldots$, то

$$(1) \qquad \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \ldots$$

Умноживъ обѣ части на $y = uvw\ldots$, мы увидимъ, что *производная произведенія есть сумма произведеній, получаемыхъ отъ умноженія производнаго каждаго множителя на произведеніе всѣхъ остальныхъ.*

Если данная функція y есть частное, $y = \frac{u}{v}$, двухъ функцій u и v отъ x'а, то u будетъ произведеніемъ v на y и формула (1) дастъ

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} + \frac{y'}{y},$$

или, перенеся, что слѣдуетъ, и умноживъ въ концѣ концовъ на $y = \frac{u}{v}$,

$$(2) \qquad \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} = \frac{vu' - uv'}{uv}, \quad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Производная частнаго равна отношенію, знаменатель котораго есть квадратъ дѣлителя даннаго частнаго, а числитель — разность между произведеніемъ дѣлителя на производную дѣлимаго и произведеніемъ дѣлимаго на производную дѣлителя.

Частное $\frac{u}{v}$, гдѣ u и v двѣ конечныя и безпрерывныя функціи при всѣхъ конечныхъ значеніяхъ перемѣннаго x, часто представляетъ *воображаемое* дѣйствіе, т.-е. не даетъ уже точныхъ результатовъ, когда его дѣлитель $= 0$. Дѣйствительно если x получаетъ значеніе a, уничтожающее v, то само частное $\frac{u}{v}$, какъ извѣстно, дѣлается или неопредѣленнымъ или теряетъ смыслъ, смотря по тому, уничтожается или не

уничтожается въ то же время *u*. Но это значеніе x'а не должно быть разсматриваемо одно, такъ какъ x есть перемѣнное; и принципъ единства или порядка, уже приложенный нами къ нѣсколькимъ вопросамъ и изложенный нами въ концѣ № 3, заставляетъ предполагать, что функція безпрерывна, всякій разъ, какъ это не опредѣлено ея величиной. Слѣдовательно, для частнаго $\frac{u}{v}$ (при $x = a$) надо выбирать только значенія, *могущія перейти* въ тѣ, которыя оно получаетъ, если x начинаетъ все менѣе и менѣе отличаться отъ a. Мы увидимъ далѣе, что этотъ принципъ въ большинствѣ случаевъ устраняетъ трудность или сразу опредѣляетъ функцію въ случаѣ, если u уничтожается въ одно время съ v. Но въ противоположномъ случаѣ, когда u разнится отъ 0 при $x = a$, ясно, что функція безгранично увеличивается (по абсолютной величинѣ) вмѣстѣ съ приближеніемъ ея знаменателя къ нулю; такъ что для нея можно выбрать (при $x = a$) либо *безконечную* величину, если v уничтожается безъ измѣненія знака или если всѣ разсматриваемыя очень большія значенія частнаго имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, либо даже двѣ безконечныхъ величины, одну положительную, другую отрицательную, если, какъ это обыкновенно и бываетъ, v, уничтожаясь, измѣняетъ знакъ; далѣе же какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ поступать (насколько это возможно) при $x = a$ уже какъ съ значеніями съ противоположными знаками, относя одни къ значеніямъ x'а, меньшимъ a, а другія къ значеніямъ x, большимъ a. Въ послѣднемъ случаѣ говорятъ, что функція *рѣзко* перескакиваетъ при $x = a$ отъ $-\infty$ къ $+\infty$ или отъ $+\infty$ къ $-\infty$, смотря по тому, будутъ ли эти значенія при x, меньшемъ чѣмъ a, отрицательны или положительны. Но перемѣняетъ ли функція или нѣтъ свой знакъ, она все равно *проходитъ черезъ безконечность*, а этого достаточно, чтобы выразить, что она дѣлается прерывной въ то мгновеніе, когда $x = a$. Дѣйствительно, если заставить x измѣниться, начиная съ значенія a, даже немного, то частное $\frac{u}{v}$ получитъ уже не очень малое измѣненіе, какъ это было бы въ случаѣ безпрерывности, но измѣненіе безконечное или превосходящее всякое представленіе. И производная отъ $\frac{u}{v}$ сдѣлается безконечной въ то же время, какъ $\frac{u}{v}$, потому что, въ сосѣдствѣ, тамъ, гдѣ варіаціи функціи уже внѣ всякаго соотношенія съ варіаціями перемѣннаго, эта производная не можетъ переставать быть крайне большой (по абсолютной величинѣ) и тѣмъ труднѣе ей сдѣлать это, чѣмъ ближе къ критическому значенію $x = a$ происходитъ это.

---

12. — Продолженіе: производная степени. Доказательство существованія числа e.

Если въ произведеніи $y = uvw\ldots$ изъ n производителей $u, v, w, \ldots$ сдѣлаемъ всѣ производители равными, или сдѣлаемъ $y = u^n$, то формула (1) обратится въ

$$\frac{y'}{y} = \frac{nu'}{u}.$$

Но то же простое разсужденіе имѣетъ мѣсто и тогда, когда n есть число цѣлое и отрицательное $(-m)$, т.-е. въ случаѣ, когда, по опредѣленію, u^n будетъ выражать частное $\frac{1}{u^m}$: дѣйствительно, первая формула (2), въ которой во второй части u замѣняется 1-цей, v черезъ u^m и, слѣдовательно, обратно, $\frac{u'}{u}$ — нулемъ, $\frac{v'}{v}$ черезъ $\frac{mu'}{u}$, — дастъ $\frac{y'}{y} = -\frac{mu'}{u} = \frac{nu'}{u}$. Она останется такой же и тогда, когда n будетъ равно какой-нибудь дроби $\frac{p}{q}$ (гдѣ всегда можно выбрать знаменатель q положительнымъ числомъ), когда, по опредѣленію, $y = u^n$ есть не что иное, какъ корень $\sqrt[q]{u^p}$, предполагаемый дѣйствительнымъ, но взятый съ какимъ-нибудь однимъ изъ своихъ знаковъ. Тогда два выраженія y^q, u^p, имѣющія цѣлые показатели, будутъ тождественно представлять одну и ту же функцію, производная которой, дѣленная на эту функцію, сама сдѣлается слѣдовательно, по желанію, или $\frac{qy'}{y}$ или $\frac{pu'}{u}$. Отсюда слѣдуетъ опять $\frac{y'}{y} = \frac{p}{q}\frac{u'}{u}$. Такимъ образомъ какой бы ни былъ показатель n, положительный или отрицательный, цѣлый или дробный и даже (по свойству безпрерывности) несоизмѣримый, отношеніе производной отъ u^n къ самой функціи u^n будетъ всегда величиной $\frac{nu'}{u}$. Если же умножимъ формулу $\frac{y'}{y} = \frac{nu'}{u}$ на $y = u^n$, то получимъ $y' = nu^{n-1}u'$. Отсюда слѣдуетъ, что *производная какой-либо степени u^n всякой функціи u получается отъ алгебраическаго уменьшенія показателя на единицу, и затѣмъ отъ умноженія этого результата на первоначальнаго показателя и производную функціи u.*

Дано напр. $n = \frac{1}{2}$ или надо найти производную отъ $\sqrt{u}$; получится $\frac{1}{2}u^{-1/2}u'$, т.-е. $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Такимъ образомъ *производная квадрат-*

наго корня есть частное отъ дѣленія производной подкоренного количества на удвоенный корень.

Въ частномъ случаѣ, когда функція u есть само перемѣнное x и когда отсюда имѣютъ $\Delta u = \Delta x$, $\frac{\Delta u}{\Delta x} = 1$, $u' = 1$, получаемъ какъ производную отъ x^n, $y' = nx^{n-1}$. Это выраженіе стремится замѣтно къ $y' = n$, когда x^{n-1} разнится очень мало отъ единицы. Это бываетъ всегда, когда x отличается очень мало отъ единицы. Слѣдовательно, если x, начиная съ перваго значенія $x = 1$, получаетъ увеличеніе H столь малое, что во всемъ этомъ интервалѣ H разность между x^{n-1} и единицей остается очень малой дробью послѣдней, то будемъ имѣть, согласно съ предыдущей формулой (стр. 31), гдѣ Δx надо предположить равнымъ H, а $\Delta y = (1+H)^n - 1$,

$$(1+H)^n - 1 = nH(1+\varepsilon),$$

причемъ $(1+\varepsilon)$ выражаетъ число, очень мало разнящееся отъ 1 и заключающееся между двумя крайними значеніями x'а, 1 и $(1+H)^{n-1}$. Но $(1+H)^{n-1}$, частное отъ дѣленія $(1+H)^n$ на $1+H$, очень мало разнится отъ единицы и то же самое будетъ слѣдовательно и съ отношеніемъ $1+\varepsilon$ двухъ выраженій $(1+H)^n - 1$ и nH, если $(1+H)^n$ отличается мало отъ 1 въ то же время, какъ и $1+H$. Но при послѣдовательныхъ малыхъ значеніяхъ H'а, все болѣе и болѣе удаляющихся отъ нуля, двѣ функціи $(1+H)^n - 1$ и nH все болѣе и болѣе отдаляются другъ отъ друга, а при томъ же условіи небольшой величины H ихъ относительное quasi-равенство, даже переставая быть весьма приближеннымъ, если $(1+H)^n$ начинаетъ чувствительно разниться отъ 1, не позволяетъ первой, $(1+H)^n - 1$, слишкомъ замѣтно отличаться отъ нуля безъ того, чтобы это не стала дѣлать и другая, nH; поэтому при разсматриваемыхъ слабыхъ значеніяхъ H эти обѣ функціи остаются или нѣтъ въ одно и то же время очень близкими отъ нуля

Такимъ образомъ, сказать, что $1+H$ и $(1+H)^n$ очень мало разнятся отъ 1, значитъ сказать, что H и nH очень малы по отношенію къ 1, и вышеописанная формула можетъ быть написана еще въ видѣ

(3) (при очень малыхъ H и nH) $\qquad (1+H)^n = 1 + nH(1+\varepsilon)$,

при чемъ ε стремится къ нулю, когда наибольшее (по абсолютной величинѣ) изъ двухъ чиселъ H и nH стремится къ нему же.

Это равенство (3) заслуживаетъ вниманія; такъ какъ, если показатель n здѣсь количество безпрерывное, получающее слѣдовательно несоизмѣримыя значенія, то первый членъ трансцендентенъ, тогда какъ второй, гдѣ n входитъ въ качествѣ коэффиціента, — алгебраиченъ, если онъ обращается съ приближеніемъ, могущимъ неопредѣленно увеличиваться, въ $1+nH$. Формула эта является поэтому переходомъ отъ

алгебраическаго количества къ трансцендентному или соединенiемъ того съ другимъ, хотя этотъ переходъ, собственно говоря, есть простая точка соприкосновенiя, такъ какъ онъ касается только очень близкихъ къ 1 степеней чиселъ, имѣющихъ сами свои значенiя близкими къ 1.

Итакъ обратимся къ главной части равенства (3). Здѣсь сначала возьмемъ то, что можетъ намъ доказать существованiе числа e, т.-е. предѣла выраженiя $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, въ которомъ m обозначаетъ неопредѣленно увеличивающееся количество. Для этого слѣдуетъ показать, что при $m =$ довольно большому числу, число $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, которое я назову черезъ E, разнится, какъ угодно мало, отъ новаго значенiя, $E_1=\left(1+\frac{1}{km}\right)^{km}$, которое получится, если m приметъ какое-либо другое, большее абсолютное значенiе, и сдѣлается km, гдѣ k будетъ также положительнымъ множителемъ или отрицательнымъ, бо́льшимъ единицы, но совершенно произвольнымъ.

Дѣйствительно, если въ (3) примемъ $H=\frac{1}{km}$ и $n=k$, то произведенiе $nH=\frac{1}{m}$ будетъ очень малымъ, и эта формула (3) приметъ видъ

$$\left(1+\frac{1}{km}\right)^k=1+\frac{1+\varepsilon}{m},$$

отсюда

$$\left(1+\frac{1}{km}\right)^{km} \text{ или } E_1=\left(1+\frac{1}{m}+\frac{\varepsilon}{m}\right)^m,$$

и раздѣливъ на E, т.-е. на $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, затѣмъ обозначивъ черезъ ε_1 частное (замѣтно равное ε) отъ дѣленiя ε'а на $1+\frac{1}{m}$, получимъ

$$\frac{E_1}{E}=\left(\frac{1+\frac{1}{m}+\frac{\varepsilon}{m}}{1+\frac{1}{m}}\right)^m=\left(1+\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^m.$$

Приложимъ наконецъ къ выраженiю $\left(1+\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^m$ формулу (3), полагая въ ней $H=\frac{\varepsilon_1}{m}$, $n=m$; это дастъ въ результатѣ, почти точно, $1+\varepsilon_1$ или поэтому $1+\varepsilon$; тогда получимъ:

$$\frac{E_1}{E}=1+\varepsilon, \quad E_1-E=E\varepsilon.$$

Кромѣ того, когда абсолютная величина m, предположенная уже довольно большой, увеличивается до ∞, то E будетъ варіировать уже только въ ничтожномъ отношеніи и оставаться конечной. Но представимъ, что мы снова начнемъ разсужденіе, но беря при этомъ то условіе, что m все болѣе и болѣе увеличивается, такъ что ε, которое стремится къ нулю вмѣстѣ съ $\frac{1}{m}$, неопредѣленно уменьшается. Такъ какъ мы знаемъ, что E никогда не переступитъ извѣстной величины, то произведеніе $E\varepsilon$, выраженіе послѣдующихъ измѣненій E, весьма ясно стремится къ нулю, а слѣдовательно, E или $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ очень приближается къ предѣлу, выражающемуся черезъ букву e. Этотъ предѣлъ очевидно не меньше единицы, такъ какъ, если m напр. положительно, то $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ постоянно будетъ больше 1.

Такъ какъ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ стремится къ предѣлу e, то отсюда слѣдуетъ, если возвести это число e въ какую-либо степень, которую я назову черезъ степень x, что e^x есть также предѣлъ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{xm}$ или $\left(1+\frac{x}{mx}\right)^{mx}$. Но достаточно чтобы x разнилось отъ нуля, какъ произведеніе mx получаетъ послѣдовательно, если m начнетъ увеличиваться, всевозможныя очень большія абсолютныя значенія. Кромѣ того mx есть, какъ m, число положительное или отрицательное, неопредѣленно увеличивающееся и можетъ одинаково называться m. Такимъ образомъ имѣемъ формулу

$$(4) \qquad e^x = \text{предѣлу } \left(1+\frac{x}{m}\right)^m, \text{ когда } m \text{ очень велико.}$$

Она опредѣляетъ, при всѣхъ конечныхъ значеніяхъ степени e^x, лишь бы m было соизмѣримо, то приближенное превращеніе трансцендентнаго количества въ алгебраическое, которое дѣлаетъ формула (3) въ случаѣ степени, очень близкой къ 1.

Но въ сущности, какъ мы видимъ, таковъ результатъ и той же самой формулы (3), которая позволила намъ доказать quasi-неизмѣняемость выраженія $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}$, когда m при этомъ варіируетъ, не переставая быть очень большой величиной; а это позволяетъ намъ сохранять степень mx постоянной и соизмѣримой, какое бы значеніе ни получало x, перенося варіированія, отъ которыхъ происходятъ измѣненія x, на выраженіе въ скобкахъ $1+\frac{1}{m}=1+\frac{x}{mx}$, которое сдѣлается тогда $1+\frac{x}{\text{const}}$.

14. Производная обратной функціи.

Геометрическія построенія часто облегчаютъ вычисленіе производныхъ или приводятъ по крайней мѣрѣ къ интереснымъ видамъ результаты этихъ вычисленій.

Возьмемъ напр. функціи $y = f(x)$ или скорѣе ея производную $f'(x)$, при x, соотвѣтствующемъ извѣстному значенію, обозначенному черезъ y, функціи; если надо найти производную обратной функціи $x = \varphi(y)$ въ моментъ, когда y получитъ это значеніе, то для этого будетъ достаточно представить двѣ функціи f и φ одной и той же кривой AB, отнесенной къ системѣ Ox и Oy и разсматриваемой съ одной стороны въ формѣ $OM'MB$, которую она образуетъ съ Ox и которая выражаетъ прямую функцію $y = f(x)$, а съ другой стороны въ формѣ $OM''MB$, которую она образуетъ съ Oy и которая изображаетъ обратную функцію $x = \varphi(y)$.

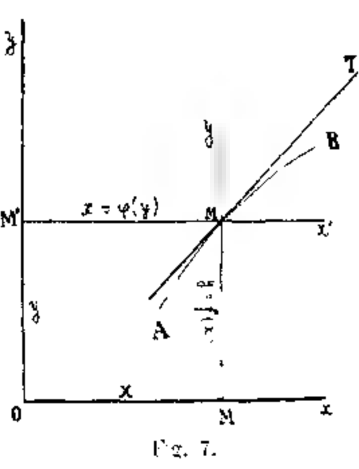


Fig. 7.

Два *отклоненія,* представляющіяся $f'(x)$ и $\varphi'(y)$, касательной MT по отношенію къ осямъ Ox и Oy или къ ихъ параллелямъ Mx' и My' будутъ тангенсами угловъ $x'MT$ и его дополнительнаго, $y'MT$; по извѣстному свойству тангенсовъ таковыхъ угловъ, ихъ произведеніе будетъ единицей. Будемъ имѣть

$$(7) \qquad f'(x)\varphi'(y) = 1, \quad \text{откуда} \quad \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Это говорится такъ: *производныя двухъ обратныхъ функцій обратны другъ другу или имѣютъ въ произведеніи единицу.* Но это можно найти еще болѣе непосредственно, если обратиться къ главнымъ выводамъ предыдущаго доказательства, замѣтивъ, что два одни и тѣ же очень малыя увеличенія Δx и Δy перемѣнныхъ x и y служатъ для вычисленія двухъ отношеній $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, которыя въ предѣлѣ обратятся въ двѣ взаимныя производныя $f'(x)$ и $\varphi'(y)$. Но эти отношенія, имѣя въ произведеніи единицу, не могутъ и въ своихъ предѣлахъ имѣть что-либо другое.

15. — Производная дуги кривой линіи.

Очень простое построеніе позволяетъ узнать производную дуги или пути, который пробѣгаетъ движущаяся точка, три координаты которой x, y, z, отнесенныя къ системѣ прямоугольныхъ дугъ, суть три данныя функціи f_1, f_2, f_3 времени t. Этотъ путь, который обыкновенно обозначаютъ черезъ s, считается отъ исходнаго пункта какой-либо точки A (fig. 8) написанной кривой, въ которой (точкѣ) находится движущаяся точка въ данный моментъ, положительно для всѣхъ эпохъ, послѣдующихъ отъ этого момента, и отрицательно для всѣхъ предыдущихъ. Ясно, что извѣстное значеніе въ каждое мгновеніе будетъ опредѣленной функціей t, производная которой должна получиться, разъ мы знаемъ посредствомъ трехъ равенствъ $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ законъ движенія.

Пусть $AM = s$ будетъ дуга, которая получилась ранѣе эпохи t, въ которую движущаяся точка находится въ точкѣ $M(x, y, z)$, а MM' очень малая дуга, получаемая сейчасъ же вслѣдъ, въ эпоху Δt, дуга, которую мы назовемъ черезъ Δs, потому что она есть увеличеніе s'а, соотвѣтствующее Δt. Черезъ $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ мы обозначимъ координаты положенія M' движущейся точки въ эпоху $t + \Delta t$, при чемъ Δx, Δy, Δz выражаютъ соотвѣтственныя увеличенія x'а, y'а, z'а, когда точка переходитъ изъ M въ M'.

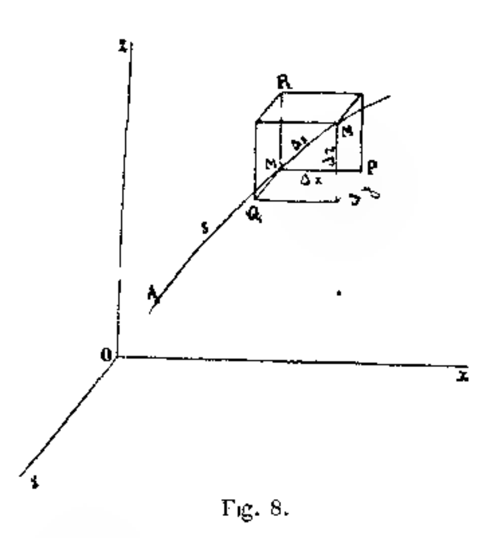


Fig. 8.

Эти увеличенія построятся, какъ извѣстно, если провести въ точкѣ M и M' плоскости, параллельныя плоскостямъ координатъ xy, yz, zx, и измѣрить вдоль прямыхъ линій MP, MQ, MR, образуемыхъ ихъ взаимными пересѣченіями, отрѣзокъ между двумя изъ этихъ плоскостей, которыя параллельны либо yz, либо xz, либо xy. Три измѣренія MP, MQ и MR параллелепипеда $MPQRM'$, отложенныя положительно или отрицательно, смотря по тому, взяты ли они въ одинаковомъ смыслѣ съ Ox, Oy и Oz или въ обратномъ, выразятся, слѣдовательно, черезъ Δx, Δy, Δz. Но діагональ MM', представляемая также въ видѣ $\sqrt{(MP)^2 + (MQ)^2 + (MR)^2}$, есть хорда дуги Δs и имѣетъ съ Δs, по теоремѣ конца № 5, отношеніе, очень мало разнящееся отъ единицы:

Δs равно также произведенію $\sqrt{(MP)^2+(MQ)^2+(MR)^2}$ на множитель, стремящійся къ единицѣ, когда Δt стремится къ нулю; а такъ какъ $MP=\pm\Delta x$, $MQ=\pm\Delta y$, $MR=\pm\Delta z$, то отношеніе $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, которое предполагается разсматривающимся въ предѣлѣ, есть произведеніе

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}$$

на этотъ самый множитель. Когда Δt уничтожается и $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta z}{\Delta t}$, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ дѣлаются соотвѣтственными производными x', y', z', s', то имѣемъ еще

$$(8) \qquad s'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\sqrt{f'_1(t)^2+f'_2(t)^2+f'_3(t)^2}.$$

Между тѣмъ какъ три производныя x', y', z' измѣряютъ протяженія, которыя, начиная съ эпохи t будутъ пробѣгаемы вдоль трехъ соотвѣтственныхъ осей въ единицу времени, если движеніе будетъ въ это единицу времени таково же, какъ и въ эпоху t, производная s' опредѣляетъ дѣйствительное протяженіе, которое пробѣжитъ движущаяся точка при тѣхъ же условіяхъ. Такимъ образомъ эта производная называется общей скоростью движущейся точки или просто скоростью, тогда какъ x', y', z', суть только *скорости вдоль осей* (les vitesses suivant les axes).

Если хотятъ разсматривать то, что называютъ черезъ s, не какъ весь путь, пробѣгаемый съ даннаго момента, но какъ настоящее разстояніе движущейся точки, измѣряемое вдоль этой кривой до точки A кривой, считая при этомъ положительно для точекъ M, которыя лежатъ по одну сторону точки A и отрицательно для точекъ, лежащихъ по другую сторону, то увеличеніе Δs и отсюда производная s' очевидно будутъ имѣть $+$ въ тѣ моменты, когда движущаяся точка *движется впередъ* по своей траэкторіи и знакъ $-$ въ тѣ моменты, когда она движется назадъ. Знакъ радикала въ (8) долженъ быть взятъ, смотря по обстоятельствамъ, положительный или отрицательный. Въ геометріи его берутъ всегда положительнымъ, потому что предполагаютъ для простоты, что кривая образуется отъ *поступательнаго* движенія, т.-е. безъ всякой смѣны ретрограднымъ движеніемъ, почему увеличенія Δs дуги и должны быть положительны, какъ увеличенія Δt времени.

Изъ всѣхъ способовъ изображенія кривой самый простой это тотъ, когда движущаяся точка постоянно проходитъ разстояніе, равное единицѣ, во время, равное 1, именно считая время t съ того момента, когда движущаяся точка была въ A; въ этомъ случаѣ разстояніе s будетъ равняться времени t и, слѣдовательно, дуга s будетъ независимымъ перемѣннымъ. Тогда $s'=1$; формула же (8), возведенная въ квадратъ, дастъ

$$x'^2+y'^2+z'^2=1.$$

Такимъ образомъ координаты x, y, z тогда просто три *различныя* функціи независимаго перемѣннаго s, такъ какъ квадраты ихъ трехъ производныхъ способны въ суммѣ дать единицу; но каждая изъ этихъ функцій въ то же время совершенно *непроизвольна,* такъ какъ ея *отклоненіе* должно всегда заключаться между -1 и $+1$.

Другой простой способъ образованія кривой заключается въ томъ, что заставляютъ движущуюся точку пробѣгать въ проекціи на одной изъ трехъ осей, напр. на оси x'овъ, разстоянія, равныя 1, въ промежутки времени, равные 1, почему x постоянно растетъ какъ t, и $x=t$ (при условіи соотвѣтственно выбраннаго начала промежутковъ времени). Тогда $x'=1$ и y и z дѣлаются двумя функціями x'а. Формула (8) является въ видѣ

$$(10) \qquad s' = \sqrt{1+y'^2+z'^2}.$$

Наконецъ въ частномъ случаѣ кривой, лежащей на плоскости, можно взять ея плоскость за плоскость xy и тогда $z=0$, $z'=0$. Два уравненія, выражающія y и z въ видѣ функціи x'а обращаются въ простое уравненіе $y=f(x)$ кривой, и производная s' дуги сдѣлается

$$(11) \qquad s' = \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+f'(x)^2}.$$

16. — Обозначеніе и производная экспонентной функціи и функціи логариѳмической.

Легко прійти къ экспонентной функціи, образуя, при послѣдовательныхъ степенахъ (съ цѣлыми показателями),

$$\ldots, K^{-n}, \ldots, K^{-2}, K^{-1}, K^{0} \text{ или } 1, K^1, K^2, \ldots, K^n, \ldots,$$

числа K, большаго единицы, различныя значенія безпрерывной функціи $y=f(x)$, идущей отъ нуля къ ∞; это позволяетъ построить, если взять эти значенія для ординатъ, кривую, безпрестанно поднимающуюся, называемую *логариѳмической* и заключающуюся между предѣлами $y=0$ и $y=\infty$, когда абсцисса возрастаетъ отъ $x=-\infty$ до $x=+\infty$. Для того, чтобы эти степени $y=K^n$, каждая изъ которыхъ есть произведеніе предшествовавшей на K, увеличивались только понемногу, надо взять это число K едва большимъ единицы, т.-е. въ формѣ $1+\frac{1}{m}$, гдѣ m означаетъ напр. число цѣлое, положительное и очень большое. Затѣмъ, откладывая другъ около друга и выше оси x'овъ послѣдовательныя, такимъ образомъ получаемыя, ординаты кривой, мы принуждены будемъ по свойству безпрерывности, откладывать каждую изъ нихъ очень близко отъ предшествующей и, слѣдовательно, брать абс-

циссу x равной не показателю n, элементарное или возможно наименьшее увеличеніе котораго есть 1, а числу, въ n разъ большему дроби единицы длины, дроби, которая будетъ представлять такимъ образомъ единицу показателя. Но естественно — выбрать для этой самой дроби дробь $\frac{1}{m}$, которая, приложенная къ единицѣ, давала бы число K и служила бы основаніемъ для всего вычисленія. Отсюда имѣемъ съ одной стороны $y = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n$, а съ другой стороны $x = \frac{n}{m}$ или $n = mx$ и, слѣдовательно, замѣняя n, получимъ

$$y = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mx} = \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^x.$$

Кромѣ того превышеніе Δy какой-нибудь ординаты $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{n+1}$ надъ предшествующей $y = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n$, и разность Δx между двумя соотвѣтствующими абсциссами $\frac{n+1}{m}$, $\frac{n}{m}$ или x, будутъ

$$\Delta y = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n \left(1 + \frac{1}{m} - 1\right) = \frac{y}{m}, \quad \Delta x = \frac{1}{m}, \text{ откуда } \frac{\Delta y}{\Delta x} = y.$$

Такимъ образомъ, отношеніе элементарнаго увеличенія функціи къ увеличенію перемѣннаго постоянно равняется настоящей величинѣ функціи.

Но, если принять, уменьшая все болѣе и болѣе интервалъ ординатъ, что m неопредѣленно увеличивается, то выраженіе $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ будетъ стремиться, какъ это видѣли (стр. 38), къ числу e. Въ предѣлѣ получится выраженіе e^x, какъ искомая безпрерывная функція. Въ кривой, которая ее представляетъ, увеличеніе k, получаемое ординатой y при всякомъ очень маломъ увеличеніи h абсциссы, будетъ составляться изъ числа, крайне большого, элементарныхъ разностей Δy, имѣющихъ съ аналогичными увеличеніями Δx абсциссы отношеніе y, очень мало разнящееся, при всѣхъ значеніяхъ, отъ ординаты e^x, относящейся къ первой изъ этихъ абсциссъ; а слѣдовательно, по теоремѣ стр. 11, сумма k этихъ значеній Δy съ суммой h соотвѣтствующихъ значеній Δx будетъ имѣть отношеніе, опять замѣтно равное e^x или, скорѣе, менѣе и менѣе отличающееся отъ e^x, если будемъ брать все болѣе и болѣе слабой абсолютную величину h. Такимъ образомъ, *производная экспонентной функціи e^x равна самой функціи e^x.*

Впрочемъ это уже было извѣстно при функціи $y = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mx}$, взятой съ m, равнымъ очень большому числу, и предполагаемой безпрерывной отъ сложенія не цѣлыхъ показателей mx, дѣйствительно, если

увеличить x очень малымъ количествомъ h и при этомъ, если k обозначаетъ соотвѣтствующее увеличеніе, $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx+mh}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}$, количества y, то получимъ

$$k=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mh}-1\right]=y\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mh}-1\right],$$

или прилагая къ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mh}$ формулу (3)

$$k=y[1+h(1+\varepsilon)-1]=hy(1+\varepsilon).$$

Такимъ образомъ, отношеніе $\frac{k}{h}$, т.-е. слѣдовательно производная функціи y имѣетъ видъ $y(1+\varepsilon)$; а это и надо было узнать.

Функція e^x по формулѣ (4) (стр. 38) есть предѣлъ выраженія $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, алгебраическаго, если очень большое m будетъ соизмѣримо. Но мы можемъ придать m'у положительное цѣлое значеніе, чтобы выраженіе было простымъ полиномомъ, а извѣстная формула бинома Ньютона дастъ для этого полинома, расположеннаго по восходящимъ степенямъ x'а,

$$(12)\left\{\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m&=1+\frac{m}{1}\frac{x}{m}+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{x^2}{m^2}+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\frac{x^3}{m^3}+\dots\\&\quad+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\dots\frac{m-n+1}{n}\frac{x^n}{m^n}+\dots=\\&=1+\frac{x}{1}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{1.2}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{1.2.3.}+\dots\\&\quad+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{x^n}{1.2.3\dots n}+\dots\end{aligned}\right.$$

Но, если, увеличивая неопредѣленно m, станемъ разсматривать въ третьей части членъ, очень большой по порядку, но *неподвижный*, напр. $i+1$-ый со всѣми ему предшествующими, то замѣтимъ, что ихъ сумма будетъ стремиться къ

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\dots+\frac{x^i}{1.2.3\dots i},$$

такъ какъ ихъ множители $1-\frac{1}{m}$, $1-\frac{2}{m}$, ..., $1-\frac{i-1}{m}$, въ разсматриваемомъ числѣ будутъ равняться въ предѣлѣ единицѣ. Но это будетъ справедливо для числа членовъ, неопредѣленно увеличивающагося съ m.

Что касается до прочихъ, болѣе и болѣе удаленныхъ, гдѣ извѣстные изъ этихъ множителей, какъ $1 - \frac{n-1}{m}$, будутъ оставаться замѣтно меньшими единицы, членовъ, очевидно меньшихъ по абсолютной величинѣ, чѣмъ аналогичные члены въ серіи $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$, то ихъ сумма будетъ стремиться къ нулю, если совокупная абсолютная величина членовъ, достаточно удаленныхъ также, этой послѣдней серіи тоже стремится къ нулю. Но здѣсь это такъ; дѣйствительно, въ выраженіи

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x^n}{1.2.3..n} + \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} + \cdots$$

отношеніе $(n+2)$-ого члена къ $(n+1)$-ому равно $\frac{x}{n+1}$ и стремится къ нулю, когда n увеличивается безпредѣльно. Слѣдовательно, по очень простому признаку сходимости (стр. 5), разсматриваемая серія имѣетъ конечное значеніе, ясно опредѣленное, каково бы ни было x между $-\infty$ и $+\infty$. Формула (12) тогда сдѣлается, если перейти къ предѣлу и замѣнить черезъ e^x,

(13) $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \cdots$$

Эта же трансцендентная функція e^x, разложенная въ серію, составляетъ, какъ мы видѣли, предѣльную форму цѣлой алгебраической функціи, или простого полинома. Кромѣ того мы знаемъ, что эта серія имѣетъ для своей производной равную себѣ серію.

Формула (13) при $x = 1$, дастъ значеніе числа e въ очень сходящейся формѣ

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \cdots$$

Отсюда, вычисливъ вторую часть, получимъ $e = 2{,}7182818\ldots$. Различныя степени этого числа очевидно могутъ сдѣлаться какъ угодно велики, когда ихъ показатель положителенъ и увеличивается, и столь же малы или, по крайней мѣрѣ, очень близки къ нулю, когда ихъ показатель отрицателенъ и уменьшается до $-\infty$; поэтому принимая дробные показатели степени, онѣ образуютъ безпрерывно увеличивающіеся отъ 0 къ ∞ рядъ, когда перемѣнное увеличивается отъ $-\infty$ до $+\infty$. Очевидно, эта формула можетъ служить для вычисленія таблицы этого ряда значеній, таблицы, гдѣ можно найти наоборотъ, лишь бы она была достаточно полна, самое значеніе x'а, соотвѣтствующее желаемому положительному значенію $y = e^x$. Эта функція x, обратная $y = e^x$, которую называютъ *логариѳмической* функціей или, чаще, *логариѳмомъ ея перемѣннаго* y, пишется поэтому черезъ $\lg y$. Она, очевидно, увеличи-

вается, какъ и e^x, отъ $-\infty$ до $+\infty$; но ея перемѣнное, e^x или y, варіируетъ только отъ нуля до $+\infty$, образуя разсматриваемую функцію x отрицательной, когда функція и перемѣнное меньше единицы, и положительной, когда она превосходитъ единицу. Далѣе увидимъ, что, чтобы вычислить различныя значенія $\lg y$, употребляютъ пріемъ, болѣе скорый, чѣмъ образованіе и употребленіе таблицы экспонентной функціи. Но все же нѣтъ *общей* простой формулы, аналогичной серіи (13). Все, что можно сдѣлать въ этомъ отношеніи, чтобы представить ее, какъ предѣлъ алгебраической функціи не только цѣлой (какъ для e^x), но и пропорціональной, это — рѣшить по отношенію къ x'у уравненіе (13), которое приметъ видъ, какъ мы видѣли,

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x(1+\varepsilon) = y(1+\varepsilon),$$

если ε есть количество, стремящееся съ $\frac{1}{m}$ къ нулю. Но извлеченіе m'аго корня изъ первой и третьей части, если приложить формулу (3) [стр. 36], чтобы сократить выраженіе $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{m}}$, и если назвать черезъ ε_1 новое, очень малое и замѣтно равное ε, количество, — даетъ

$$1+\frac{x}{m} = \sqrt[m]{y}\left(1+\varepsilon\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{y}\left(1+\frac{\varepsilon_1}{m}\right);$$

отсюда

$$x \text{ или } \lg y = m\left(\sqrt[m]{y}-1\right)+\varepsilon_1\sqrt[m]{y},$$

и заставляя неопредѣленно увеличиваться m,

$$(14) \qquad \lg y = \lim m\left(\sqrt[m]{y}-1\right) \quad \text{при } m=\infty.$$

Производная этой обратной функціи $x=\lg y$ будетъ равняться по правилу № 14 (стр. 39), частному отъ дѣленія единицы на производную прямой функціи $y=e^x$, т.-е. на $y'=e^x=y$. Такимъ образомъ, *производная логариѳмической функціи $x=\lg y$ есть просто обратное $\frac{1}{y}$ ея перемѣннаго.*

Главное свойство логариѳмовъ вытекаетъ изъ того, что они представляютъ *пропорціонально* цѣлые показатели $\left(1+\frac{1}{m}\right)$-а, которые складываются, когда умножаютъ соотвѣтствующія степени, выражающіяся (въ предѣлѣ или при $m=\infty$) какими-либо положительными *числами;* свойство это состоитъ въ томъ, что *логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ его множителей.* Извѣстно, какъ многочисленны случаи

вычисленія, иначе почти неисполнимые, но дѣлающіеся легкими при употребленіи логариѳмическихъ таблицъ небольшого ряда цѣлыхъ *чиселъ*. Но извѣстно также, что эти вычисленія при употребленіи десятичной системы нумераціи становятся еще болѣе удобными, если написать въ таблицахъ противъ чиселъ и на мѣстѣ соотвѣтствующихъ значеній логариѳмической функціи ихъ отношенія къ логариѳму, 2,30259 съ нѣкоторой ошибкой, *основанія* 10, которое даетъ системѣ (при помощи ея степеней съ цѣлыми показателями) всѣ необходимыя большія и малыя *единицы*. Точно такъ же замѣняютъ логариѳмы количествами, которыя, будучи пропорціональны къ логариѳмамъ, пользуются еще свойствомъ комбинироваться въ видѣ сложенія при образованіи произведенія; въ то же время самое простое изъ этихъ количествъ, могущихъ быть взятыми здѣсь, 1, соотвѣтствуетъ 10, основанію системы: замѣчательное преимущество, потому что отсюда слѣдуетъ, что перестановки десятичной запятой въ числѣ, равнозначущія умноженію на степень 10-ти, производятъ на соотвѣтственное количество его логариѳма только то, что измѣняется цѣлая часть. Эти количества называются *десятичными логариѳмами;* собственно же называемые логариѳмы, значенія логариѳмической функціи, которыя равняются ихъ произведеніямъ на $\lg 10 = 2,30259$, называются *натуральными* или *Неперовыми*.

Вообще, взявъ a за какое-либо положительное число, называютъ *логариѳмами, имѣющими основаніе* a, частныя отъ дѣленія натуральныхъ логариѳмовъ, $\lg y$, различныхъ чиселъ y на натуральный логариѳмъ a. Знакъ $\lg$ прибавляется для обозначенія этихъ частныхъ; но, чтобы избѣжать всякихъ недоразумѣній, я буду выражать ихъ ясной формулой $\frac{\lg y}{\lg a}$ и буду писать $u = \frac{\lg y}{\lg a}$, обозначая такимъ образомъ черезъ u функцію y'a, которую они представляютъ. Впрочемъ, въ этомъ курсѣ они никогда уже болѣе не встрѣтятся; въ механикѣ же и физикѣ встрѣтятся только логариѳмы, имѣющіе основаніе e, т.-е. Неперовы. Эти логариѳмы, имѣющіе какое-либо основаніе, могутъ также быть написаны черезъ $\frac{1}{\lg a} \lg y$. Обратное натуральнаго логариѳма основанія, которое здѣсь фигурируетъ, какъ множитель, на который надо, для полученія искомыхъ логариѳмовъ, множить натуральныя логариѳмы, называется *модулемъ:* онъ равенъ $\frac{1}{2,30259} = 0,434294...$ въ случаѣ десятичныхъ логариѳмовъ.

Такъ такъ производная произведенія $\frac{1}{\lg a} \lg y$ получается отъ умноженія постояннаго множителя на производную $\frac{1}{y}$ другого множителя $\lg y$ $\left(\text{это даетъ } u' = \frac{1}{y} \frac{1}{\lg a}\right)$, то ясно, что *производная логариѳма перемѣн-*

наго равна обратному числу произведенія этого перемѣннаго на Неперовъ логариѳма основанія.

Изъ равенства $u = \frac{\lg y}{\lg a}$ или $\lg y = u \lg a$ и изъ того, что $\lg y$ означаетъ показатель, съ числомъ e котораго надо дѣйствовать для полученія y, получается:

$$y = e^{u \lg a} = (e^{\lg a})^u$$

и наконецъ, такъ какъ $e^{\lg a}$ выражаетъ a,

$$y = a^u.$$

Такимъ образомъ $y = a^u$ есть обратное функціи $u = \frac{\lg y}{\lg a}$. Ее называютъ *экспонентной, имѣющей основаніе* a. Ея производная будетъ поэтому обратнымъ производной $\frac{1}{y \lg a}$ отъ u и будетъ $y \lg a$ или $a^u \lg a$.

Итакъ, *экспонентное количество* a^u, *гдѣ показатель взятъ, какъ независимое перемѣнное, имѣетъ для производной произведеніе своего собственнаго значенія на Неперовъ логариѳмъ основанія* a. Ясно, что въ частномъ случаѣ $a = e$, гдѣ функція обращается въ e^x производная сдѣлается вполнѣ равной функціи, ибо $\lg e = 1$.

Чтобы обратить экспонентное количество a^u или $e^{u \lg a}$ въ предыдущую серію, составленную по восходящимъ степенямъ буквы u, очевидно достаточно замѣнить x, въ формулѣ (13) e^x, значеніемъ $u \lg a$ показателя e.

17. — Обозначеніе и производная круговыхъ функцій.

Представимъ, что окружность радіуса 1 (fig. 9), отнесенная къ системѣ двухъ прямоугольныхъ осей, начало которыхъ помѣщено въ центрѣ, неопредѣленно пробѣгается движущейся точкой M, смотря по смыслу отъ Ox къ Oy въ прямомъ углѣ xOy или отъ Oy къ Ox внѣ этого угла, и что кромѣ того дуга, изображенная черезъ $u = AM$, считается, начиная съ момента, въ который точка M находилась въ A на положительной части оси x-овъ, положительно для послѣдующихъ эпохъ, а отрицательно для предыдущихъ: извѣстно, что абсцисса $x = OP$ и ордината $y = PM$ движущейся точки, въ какой-нибудь моментъ, будутъ соотвѣтственно называться косинусомъ и синусомъ дуги u. Другими словами, двѣ функціи $\cos u$ и $\sin u$ суть тѣ величины, которыя изображаютъ двѣ координаты, когда въ разсматриваемомъ кругѣ радіуса 1, берутъ дугу за независимое перемѣнное, какъ это видѣли въ № 15 при всякой кривой.

Изъ этого слѣдуетъ нѣсколько замѣчаній:

1) Замѣтимъ, что съ одной стороны, симметричныя по отношенію къ Ox точки окружности имѣютъ одну и ту же абсциссу x, а ординаты y равныя, но съ обратнымъ знакомъ; а съ другой стороны, эти точки получаются отъ движущейся точки въ тѣ моменты, когда дуга u имѣетъ также равныя значенія, но съ обратными знаками, поэтому мы увидимъ, что при измѣненіи дугой или перемѣннымъ u знака ея, sinus измѣняетъ свой знакъ, тогда какъ cosinus остается тѣмъ же. Въ виду аналогіи sinus'а съ степенями величины u, имѣющими нечетныхъ показателей, и cosinus'а съ степенями u, имѣющими четныхъ показателей, говорятъ, что косинусъ есть *четная функція* дуги, а синусъ *нечетная функція*.

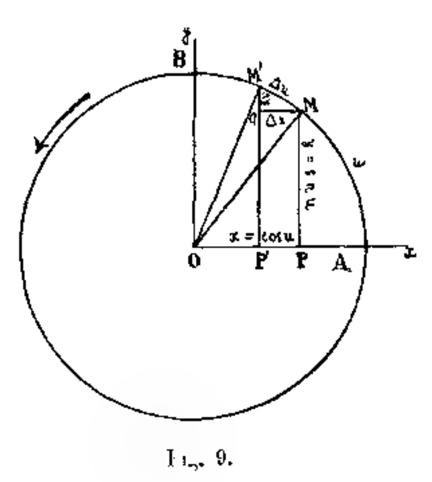


Fig. 9.

2) Двѣ симметричныя точки по отношенію Oy, или имѣющія одну и ту же ординату y, но абсциссы x, равныя и противоположныя по знаку, получаются отъ движущейся точки въ тѣ два момента, когда дуга u при одной лежитъ въ *квадрантѣ* $AB = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, а при другой лежитъ внѣ его на одномъ и томъ же разстояніи BM, которое я назову черезъ v, отъ Oy. Поэтому, каково бы ни было v, имѣемъ

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + v\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + v\right),$$

что выражается словами: когда двѣ дуги $\frac{\pi}{2} - v$ и $\frac{\pi}{2} + v$ суть *дополнительныя* другъ для друга дуги или имѣютъ въ алгебраической суммѣ полуокружность π, то ихъ sinus'ы равны, а ихъ cosinus'ы равны и противоположны по знаку.

3) Всякій разъ, какъ дуга увеличивается на полуокружность π, косинусъ и синусъ ея мѣняютъ только свои знаки, потому что точка M переносится на другой конецъ своего діаметра; слѣдовательно изъ двухъ предшествующихъ формулъ можно заключить, что

$$\left(\sin v - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right), \quad \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(v + \frac{\pi}{2}\right),$$

если мы вспомнимъ, что sinus есть нечетная функція, а cosinus четная.

4) Двѣ функціи, sinus и cosinus, сдѣлаются одинаковыми, когда дуга или путь, проходимый движущейся точкой M, измѣнится на цѣлую

окружность 2π (т.-е. когда мобиль вернется въ свое прежнее положеніе). Это выражается словами: функціи sinus и cosinus *періодичны* и ихъ *періодъ* $= 2\pi$.

5) Наконецъ, если взять y для абсциссъ и x для ординатъ, считая, слѣдовательно, дуги, которыя я буду называть черезъ v, начиная съ точки B, лежащей на оси y'овъ, и положительно въ направленіи отъ Oy къ Ox, то мы будемъ имѣть очевидно, по случаю сходства формы и симметріи окружности по отношенію ко всѣмъ діаметрамъ,

$$x \text{ или } \cos u = \sin v, \quad y \text{ или } \sin u = \cos v.$$

А каждая точка M, кромѣ того, будетъ принадлежащей *мобилю* въ то мгновеніе, когда новая дуга $v = BM$, будучи приложена къ дугѣ предшествующаго случая $AM = u$, будетъ давать постоянную сумму, квадрантъ AB, такъ какъ точка, проходимая мобилемъ ранѣе другой при первомъ способѣ образованія дуги, будетъ пробѣгаться имъ послѣ нея при второмъ; отъ этого происходитъ то, что ея разстояніе до этой другой точки (измѣряемое вдоль круга) въ послѣднемъ случаѣ прикладывается для образованія значенія v, соотвѣтствующаго этому разстоянію, и вычитается въ первомъ для образованія соотвѣтствующаго значенія u, а поэтому въ суммѣ $u + v$ не происходитъ никакого измѣненія. Кромѣ того имѣемъ $v = \frac{\pi}{2} - u$; а два равенства $\cos u = \sin v$, $\cos v = \sin u$ доказываютъ, что двѣ *дополнительныя* дуги, или имѣющія въ суммѣ четверть окружности $\frac{\pi}{2}$, имѣютъ свой cosinus равнымъ sinus'у другой.

Это послѣднее свойство, которое, будучи прибавлено къ предыдущимъ, позволяетъ написать

$$\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right), \quad \sin u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + u\right),$$

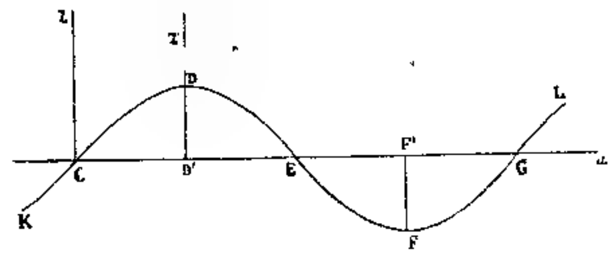


Fig. 10

показываетъ, что двѣ функціи, sinus и cosinus, просто двѣ различныхъ формы одной и той же функціи. Если эта функція, разсматриваемая какъ основная, есть напр. sinus, то достаточно разсмотрѣть при значеніи его перемѣннаго, превышающимъ $\frac{\pi}{2}$, одну данную дугу и тогда

будемъ имѣть cosinus этой дуги. Обыкновенно для представленія этой функціи берутъ *синусоиду* KL, кривую, уравненіе которой съ дугами u предшествующей окружности для абсциссъ и ихъ синусами для ординатъ z, есть $z = \sin u$, и послѣдовательныя дуги которой CDE, EFG,..., всѣ равныя между собой и симметричныя по отношенію къ ихъ максимальной ординатѣ $D'D$, $F'F$,..., но альтернативно расположенныя выше и ниже оси абсциссъ, имѣютъ для своего основанія CE или EG развернутую полуокружности π и для своей *высоты*, $D'D$, $F'F$,..., ея радіусъ 1. Быть можетъ, будетъ болѣе естественно разсматривать, какъ основную, функцію — cosinus (вслѣдствіе чего пришлось бы провести ось ординатъ $D'z'$ черезъ *вершину* D верхней дуги, а не черезъ ея первую оконечность C); дѣйствительно, формулы, въ которыхъ могутъ фигурировать либо cosinus'ы либо sinus'ы, и наоборотъ, очень часто принимаютъ очень простую форму, когда даютъ предпочтеніе косинусамъ.

Наконецъ, всегда въ кругѣ AMB (fig. 9) *отклоненіе*, $\frac{y}{x}$ или $\frac{\sin u}{\cos u}$, прямой линіи, соединяющей центръ O и подвижный конецъ M дуги $AM = u$, есть другая замѣчательная круговая функція нечетная, какъ sinus, называемая *тангенсомъ* дуги u. Тангенсъ образуется перпендикуляромъ, возстановленнымъ въ неподвижной точкѣ A до пересѣченія съ продолженіемъ разсматриваемой прямой линіи OM или MO, и считается положительно или отрицательно, смотря по тому, на какой сторонѣ y'овъ онъ лежитъ; онъ представляетъ, какъ извѣстно, эту третью круговую функцію. А тангенсъ, $\frac{\sin v}{\cos v}$, дополненія $v = \frac{\pi}{2} - u$ дуги u, или другими словами отношеніе $\frac{\cos u}{\sin u}$, обратное предыдущему, составляетъ четвертую функцію и называется *котангенсомъ* дуги u. Эти двѣ новыхъ круговыхъ функціи отличаются отъ двухъ первыхъ, синуса и косинуса: 1) въ томъ смыслѣ, что, представляя ихъ отношенія, онѣ остаются одинаковыми, когда увеличеніе π, приложенное къ дугѣ, измѣняетъ знаки синуса и косинуса, такъ что ихъ періодъ есть π, а не 2π; 2) и что уничтоженіе ихъ знаменателей $\cos u$ или $\sin u$, при значеніяхъ дуги, равныхъ кратнымъ нечетнымъ или четнымъ $\frac{\pi}{2}$, заставляетъ ихъ, черезъ каждые π, переходить въ безконечность съ измѣненіемъ знака, такъ что онѣ послѣдовательно переходятъ всю скалу величинъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, тогда какъ синусъ и косинусъ никогда не перестаютъ быть въ предѣлахъ отъ -1 до $+1$ своихъ колебаній.

Найдемъ теперь производныя этихъ четырехъ функцій. Чтобы имѣть производныя синуса и косинуса, увеличимъ дугу $AM = u$ (стр. 49) очень малымъ количествомъ $\Delta u = \text{arc } MM'$, отношеніе которой къ ея хордѣ MM' будетъ по теоремѣ, *объясненной* въ № 5, $1 + \varepsilon$, если ε обозначаетъ количество, стремящееся къ нулю вмѣстѣ съ Δu; сравнимъ при этомъ

увеличеніи $\Delta u = (1+\varepsilon)(MM')$ соотвѣтствующее увеличеніе Δy синуса, т.-е. по абсолютной величинѣ разность $P'M' - PM = QM'$, точно такъ же, какъ и увеличеніе Δx косинуса или, опять по абсолютной величинѣ, разность $OP - OP' = P'P = QM$. Тогда имѣемъ (по абсолютной величинѣ)

$$(15) \qquad \frac{\Delta \sin u}{\Delta u} = \frac{1}{1+\varepsilon}\,\frac{QM'}{MM'}, \quad \frac{\Delta \cos u}{\Delta u} = \frac{1}{1+\varepsilon}\,\frac{QM}{MM'}.$$

Но прямоугольный треугольникъ QMM' даетъ по извѣстному свойству

$$\frac{QM'}{MM'} = \cos QM'M, \quad \frac{QM}{MM'} = \sin QM'M.$$

Поэтому, острый уголъ QMM', который имѣетъ сторону QM' перпендикулярно къ сторонѣ OA угла $AOM = u$, стремится имѣть свою другую сторону MM' перпендикулярно къ другой OM того же угла AOM, такъ какъ равнобедренный треугольникъ MOM' имѣетъ уголъ O, который дѣлается все менѣе и менѣе по мѣрѣ уменьшенія MM', а уголъ M — въ основаніи, который, будучи половиной дополненія угла при вершинѣ, неопредѣленно приближается къ прямому углу: $QM'M$ отличается какъ угодно мало отъ остраго, какъ и отъ угла, стороны котораго будутъ перпендикулярами къ сторонамъ треугольника AOM. Поэтому, этотъ острый уголъ, къ которому стремится $QM'M$, имѣетъ съ тѣми же знаками такой же синусъ и косинусъ, какъ AOM или дуга u; дѣйствительно, каковы бы ни были знакъ и величина u, косинусъ и синусъ u будутъ двумя координатами точки M, т.-е., по абсолютной величинѣ, косинусомъ и синусомъ угла AOM, разсматриваемаго, какъ положительный и меньшій двухъ прямыхъ, угла, который тогда дѣлается или равнымъ или дополнительнымъ того, стороны котораго суть нормали къ его собственнымъ и который имѣетъ также синусъ и косинусъ, по абсолютной величинѣ, равные синусу и косинусу его самого. Кромѣ того отношенія $\frac{QM'}{MM'}$ и $\frac{QM}{MM'}$ и, слѣдовательно, по (15), $\frac{\Delta \sin u}{\Delta u}$ и $\frac{\Delta \cos u}{\Delta u}$ стремятся, исключая, быть можетъ, знаковъ, къ соотвѣтствующимъ предѣламъ $\cos u$ и $\sin u$. Но фигура 9 показываетъ, что синусъ увеличивается или что $\Delta \sin u$ имѣетъ знакъ Δu всякій разъ, какъ точка M, по отношенію къ оси y'овъ, лежитъ на сторонѣ положительныхъ x'овъ, т.-е., когда $\cos u$ положителенъ, и что $\Delta \sin u$ наоборотъ, отрицателенъ на сторонѣ отрицательныхъ x'овъ, гдѣ $\cos u < 0$. Такимъ образомъ отношеніе $\frac{\Delta \sin u}{\Delta u}$ имѣетъ тотъ же знакъ, что и $\cos u$ и въ предѣлѣ обращается въ $\cos u$. Что касается до варіированія $\Delta \cos u$ косинуса, то фигура показываетъ, что онѣ отрицательны выше оси x'овъ, гдѣ $\sin u$ положителенъ, положительны ниже, гдѣ $\sin u$ отрицателенъ: однимъ сло-

вочъ, знакъ ихъ противоположенъ знаку $\sin u$; такъ какъ отношеніе $\frac{\Delta \cos u}{\Delta u}$ дѣлается въ предѣлѣ $+\sin u$ или $-\sin u$, то это можетъ быть только $-\sin u$. Итакъ: *когда дуга есть независимое перемѣнное, то синусъ имѣетъ для производной косинусъ, а косинусъ — для производной синусъ съ обратнымъ знакомъ.*

Соотношеніе (9) [стр. 41], существующее для всякой кривой, отнесенной къ системѣ прямоугольныхъ осей, между производными трехъ координатъ, выражающихся въ видѣ функцій дуги, — обратится въ $y'^2+x'^2=1$, когда кривая расположена въ плоскости xy. Но это — случай нашего круга, представленнаго (u есть дуга) двумя уравненіями $x=\cos u$, $y=\sin u$. Такъ какъ въ результатѣ $x'=-\sin u$, $y'=\cos u$, то эта формула $y'^2+x'^2=1$ даетъ между косинусомъ и синусомъ какого-нибудь перемѣннаго u основное соотношеніе

$$\cos^2 u+\sin^2 u=1. \tag{16}$$

Впрочемъ, это непосредственно выводится изъ уравненія круга, въ силу чего квадратъ, $(OP)^2+(PM)^2$ или x^2+y^2, радіуса OM (стр. 49) есть постоянная величина и равна единицѣ.

Взявъ теперь, по правилу № 11 [стр. 33, вторая формула (2)], производныя двухъ дробей $\frac{\sin u}{\cos u}$ и $\frac{\cos u}{\sin u}$, получимъ для соотвѣтственныхъ производныхъ

$$\frac{(\cos u)(\cos u)-(\sin u)(-\sin u)}{\cos^2 u}=\frac{1}{\cos^2 u},$$

$$\frac{(\sin u)(-\sin u)-(\cos u)(\cos u)}{\sin^2 u}=-\frac{1}{\sin^2 u}.$$

Такимъ образомъ: *производная тангенса равна обратному квадрата косинуса, а производная котангенса — обратному, съ перемѣннымъ знакомъ, квадрата синуса.*

Видно, что каждая изъ этихъ двухъ функцій имѣетъ свою производную всегда съ тѣмъ же самымъ знакомъ: кромѣ того, когда ихъ перемѣнное увеличивается, то одна постоянно увеличивается, другая постоянно уменьшается, вездѣ, гдѣ онѣ варіируютъ постепенно. Дѣйствительно, въ каждый промежутокъ π, въ который безпрерывныя варіированія, какъ тангенса $\frac{\sin u}{\cos u}$, такъ и котангенса $\frac{\cos u}{\sin u}$, происходятъ между $\mp\infty$ и $\pm\infty$, эти варіированія всегда одного и того же смысла. Обратный переходъ отъ $\pm\infty$ къ $\mp\infty$ происходитъ рѣзкимъ скачкомъ, свойствен-

нымъ дробямъ, знаменатель которыхъ уничтожается: это происходитъ между концомъ одного интервала и началомъ слѣдующаго въ то мгновеніе, когда не существуетъ уже беапрерывности функціи и поэтому ея производной.

Наконецъ круговымъ или *прямымъ* тригонометрическимъ функціямъ

$$z = \sin u, \quad z = \cos u, \quad z = \operatorname{tg} u, \quad z = \operatorname{ctg} u,$$

соотвѣтствуютъ, конечно, обратныя, гдѣ дуга u разсматривается какъ зависимое отъ z, т.-е. отъ ея sinus'а, или cosinus'а, или tangens'а, или cotangens'а. Ихъ называютъ *обратными круговыми функціями* и выражаютъ посредствомъ arc sin, arc cos, arc tg, arc ctg связывая ихъ съ однимъ и тѣмъ же выраженіемъ перемѣннаго, которое здѣсь есть z, и говоря: *дуга, которая имѣетъ своимъ синусомъ z, или дуга, которая имѣетъ своимъ косинусомъ z*, etc.

Обратно тому, что было при логариѳмической функціи, онѣ не бываютъ вполнѣ опредѣленны; дѣйствительно, напр. одинъ и тотъ же данный синусъ можетъ быть синусомъ безчисленнаго множества различныхъ дугъ. Поэтому, при употребленіи ихъ, надо опредѣлять какимъ-либо подходящимъ условіемъ *поле*, т.-е. интервалъ, въ которомъ онѣ помѣщены, выбирая для предѣловъ этого интервала двѣ дуги, отстоящія другъ отъ друга на π, такія, чтобы при варіаціи u отъ одной къ другой перемѣнное z либо увеличивалось постоянно, либо уменьшалось постоянно, но такъ, чтобы никогда не проходило двухъ разъ черезъ одно и то же значеніе и, слѣдовательно, не давало двухъ значеній u при одномъ z. Итакъ, если z есть sinus, то надо двигать конецъ M дуги $u = AM$ (стр. 49) только съ одной стороны y'овъ, именно со стороны положительныхъ x'овъ, когда хотятъ, чтобы u увеличивалась съ увеличеніемъ своего синуса z, и со стороны отрицательныхъ x'овъ, когда дуга u должна наоборотъ уменьшаться во время увеличенія своего синуса. Обыкновенно, выбираютъ дугу между предѣлами $\mp \frac{\pi}{2}$ или самую малую по абсолютной величинѣ изъ всѣхъ тѣхъ, которые имѣютъ одинъ и тотъ же синусъ, и u увеличивается такимъ образомъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ къ $\frac{\pi}{2}$ въ то время, какъ ея синусъ варіируетъ отъ -1 до 1. Тангенсъ той же самой дуги на разстояніи отъ $-\frac{\pi}{2}$ къ $\frac{\pi}{2}$ пробѣгаетъ всю лѣстницу величинъ отъ $-\infty$ къ $+\infty$. При arc cosinus'ѣ берутъ конецъ M дуги $AM = u$ либо на положительной сторонѣ y'овъ или выше оси x'овъ, когда u должно варіировать въ обратномъ смыслѣ своего косинуса z, либо на сторонѣ отрицательныхъ y'овъ ниже оси x'овъ, когда u должно варіировать въ одномъ и томъ же смыслѣ съ своимъ косинусомъ: чаще

всего u предполагается дополненіемъ дуги, взятой между предѣлами $\pm\frac{\pi}{2}$ и имѣющей $z=\cos u$ своимъ синусомъ; отъ этого u уменьшается отъ π до нуля, когда ея косинусъ z увеличивается отъ -1 до 1. Точно такъ же arc cotangens уменьшается отъ π до нуля, когда ея $\operatorname{ctg} z=\frac{\cos u}{\sin u}$ увеличивается отъ $-\infty$ къ $+\infty$.

По правилу № 14 (стр. 39) и помня, что производными отъ $\sin u$, $\cos u$, $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{ctg} u$ суть $\cos u$, $-\sin u$, $\frac{1}{\cos^2 u}$, $\frac{-1}{\sin^2 u}$, найдемъ, что производныя $u=\operatorname{arc}\sin z$, $u=\operatorname{arc}\cos z$, $u=\operatorname{arc}\operatorname{tg} z$, $u=\operatorname{arc}\operatorname{ctg} z$ выразятся соотвѣтственно черезъ $\frac{1}{\cos u}$, $\frac{-1}{\sin u}$, $\cos^2 u$, $-\sin^2 u$. Такимъ образомъ производныя отъ $u=\operatorname{arc}\sin z$ будетъ [по (16)],

$$\frac{1}{\cos u}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

гдѣ радикалъ долженъ быть взятъ положительный, если дуга u заключена между $\mp\frac{\pi}{2}$, и, слѣдовательно, $\cos u$ положителенъ. Точно такъ же, производная отъ $u=\operatorname{arc}\cos z$ будетъ

$$\frac{-1}{\sin u}=\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 u}}=\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}},$$

гдѣ радикалъ долженъ быть взятъ опять положительный, какъ и при $\sin u$, если дуга u заключена между 0 и π. Что касается до производныхъ, $\cos^2 u$ и $-\sin^2 u$, отъ $u=\operatorname{arc}\operatorname{tg} z$ и отъ $u=\operatorname{arc}\operatorname{ctg} z$, то, если выразить по (16) $\cos^2 u$ и $\sin^2 u$ въ видѣ функцій $\operatorname{tang} u=\frac{\sin u}{\cos u}$ или $\operatorname{ctg} u=\frac{\cos u}{\sin u}$, найдемъ, что онѣ сдѣлаются $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 u}$, $\frac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2 u}$, т.-е. $\frac{1}{1+z^2}$ и $\frac{-1}{1+z^2}$. Если еще прибавить эти результаты къ производной $\frac{1}{z}$ обратной трансцендентной функціи $\lg z$, разсмотрѣнной въ предыдущемъ номерѣ, то можно будетъ сказать, что *обратныя трансцендентныя функціи* $\lg z$, $\operatorname{arc}\sin z$, $\operatorname{arc}\cos z$, $\operatorname{arctg} z$ *и* $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} z$ *имѣютъ соотвѣтственно производными алгебраическія функціи* $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, $\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$, $\frac{1}{1+z^2}$, $\frac{-1}{1+z^2}$.

———

22*. — Гиперболическія функціи

(болѣе полно разработано въ части II).

Здѣсь намъ достаточно сказать, что онѣ называются *гиперболическимъ косинусомъ, гиперболическимъ синусомъ, гиперболическимъ тангенсомъ* перемѣннаго x, и что онѣ выражаются соотвѣтственно черезъ $\cosh x$, $\sinh x$, $\operatorname{tangh} x$ или черезъ $\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$, $\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$, $\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$; первая изъ нихъ — *четна*, какъ $\cos x$, а другія двѣ *нечетны*, какъ $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$. Онѣ представляютъ большую *аналитическую* аналогію съ этими круговыми функціями, хотя ростъ ихъ совершенно иной, такъ какъ онѣ безпрерывно возрастаютъ, отъ $x=0$ до $x=\infty$, вмѣсто того, чтобы быть періодичными.

ГЛАВА III.

Предметъ и методъ анализа безконечно-малыхъ; раздѣленіе его на дифференціальное и интегральное исчисленіе.

25. — Предметъ анализа безконечно-малыхъ. Безконечно-малыя.

Теперь, послѣ того, какъ мы получили полное представленіе о функціяхъ, познакомившись съ самыми простыми изъ нихъ, мы можемъ опредѣлить *анализъ безконечно-малыхъ*.

Цѣль этого отдѣла науки заключается въ разсмотрѣніи безпрерывныхъ функцій, имѣющихъ постепенныя варіированія, въ разсмотрѣніи, раздѣляющемся на изысканія ихъ главныхъ свойствъ и способовъ, посредствомъ которыхъ можно прослѣдить ихъ движеніе или выразить ихъ различныя состоянія, и на исчисленіе ихъ значеній по условіямъ, которыя опредѣляютъ ихъ въ каждомъ случаѣ. Можно понять всю важность подобнаго занятія, замѣтивъ, что вездѣ все измѣняется нечувствительными оттѣнками, безпрерывными и неопредѣлимыми смѣнами и что сами эти перемѣны, смѣняющіяся каждое мгновеніе, очень мало отличаются другъ отъ друга; что все однимъ словомъ, варіируетъ съ безпрерывностью и постепенностью. Дѣйствительно, „природа не дѣлаетъ скачковъ" *(natura non facit saltus)*, какъ говоритъ очень древняя величайшая гипотеза, но никто изъ людей не воспользовался такъ хорошо всѣмъ ея смысломъ, какъ Лейбницъ, главный основатель въ XVIII вѣкѣ анализа безконечно-малыхъ. Такимъ образомъ, количества, способныя выражать или измѣрять предметы и явленія, суть функціи, подверженныя законамъ этого анализа.

Естественно, чтобы прослѣдить безпрерывную функцію въ ея ходѣ, надо придавать къ каждому независимому перемѣнному очень малыя увеличенія, которыя предполагаются все меньшими и меньшими. Функція тоже получаетъ очень малыя, положительныя или отрицательныя, увеличенія, которыя безпредѣльно уменьшаются по абсолютной величинѣ. Кромѣ того обязательно надо дѣлать такъ, чтобы эти увеличенія стремились такимъ образомъ къ нулю, если не хотятъ пренебрегать какимъ-

либо значеніемъ функціи, какимъ-либо состояніемъ ея хода; такимъ образомъ въ этомъ случаѣ подражаютъ природѣ, которая управляетъ черезъ крайне слабыя варіированія, совершенно нечувствительныя для нашего представленія, теченіемъ времени, своимъ главнымъ независимымъ перемѣннымъ, и соотвѣтствующимъ переходомъ предметовъ.

Такія количества, взятыя очень малыми и *стремящіяся къ нулю*, называются *безконечно-малыми*. Такимъ образомъ ихъ опредѣляютъ такъ не только по ихъ настоящей величинѣ (такъ какъ они дѣйствительно конечны), но и по тому, чѣмъ ихъ хотѣли бы сдѣлать. Дѣйствительно, если производятъ надъ ними извѣстныя операціи, то это дѣлается вовсе не для того, чтобы узнать дѣйствительно результаты этихъ дѣйствій, а для того, чтобы найти то, чѣмъ эти результаты дѣлаются *въ предѣлѣ* или къ какимъ значеніямъ они неопредѣленно приближаются по мѣрѣ того, какъ разсматриваемыя количества сами приближаются къ нулю, единственному числу, которое, разсматриваемое какъ точка отправленія растущей величины или какъ послѣдній членъ уменьшеній убывающей величины, должно, собственно говоря, быть безконечно-малымъ: иначе говоря, названіе количествъ *безконечно-малыми* означаетъ желаніе знать *только* предѣлы, къ какимъ стремятся результаты производимыхъ исчисленій.

Исчисленія, о которыхъ идетъ рѣчь, кромѣ того имѣютъ тотъ интересъ, что предѣлы ихъ результатовъ есть или, по крайней мѣрѣ, могутъ быть конечными, опредѣленными и способными представлять, въ виду безконечно разнообразныхъ значеній, также безконечное разнообразіе явленій, выражать которыя они и предназначены, безъ этого же разсмотрѣніе ихъ не представляло бы истиннаго и важнаго отдѣла раціональнаго знанія. Различаютъ два рода этихъ исчисленій; дѣйствительно существуютъ два способа операцій, способныхъ привести къ конечнымъ результатамъ, которыми можно воспользоваться *только въ предѣлѣ* и которыми можно воспользоваться *отдѣльно*, когда производятъ эти дѣйствія надъ неопредѣленно уменьшающимися количествами. Эти дѣйствія состоятъ въ томъ, что или берутъ отношеніе двухъ безконечно-малыхъ, или берутъ сумму безконечнаго ряда безконечно-малыхъ, т.-е. все болѣе и болѣе увеличивающагося числа все болѣе и болѣе уменьшающихся количествъ. Въ первомъ случаѣ, отношеніе остается конечнымъ, даже въ предѣлѣ, если два члена одновременно уменьшаются, никогда не переставая быть подобными одинъ другому, какъ это и было раньше у насъ во всѣхъ исчисленіяхъ производныхъ функцій. Сумма, во второмъ случаѣ, можетъ также стремиться къ конечному предѣлу, если число складываемыхъ количествъ дѣлается тѣмъ больше, чѣмъ каждое изъ этихъ количествъ дѣлается меньше; мы и видѣли въ примѣрахъ, особенно когда мы доказывали, что отношеніе двухъ одновременныхъ и конечныхъ увеличеній функцій и ея перемѣннаго равняется производной, взятой при промежуточномъ значеніи этого перемѣннаго.

26. — Общее правило исчисленія безконечно-малыхъ.

Анализъ безконечно-малыхъ дѣлается, вообще, гораздо проще, чѣмъ анализъ конечныхъ количествъ, вслѣдствіе слѣдующаго правила:

При всякомъ исчисленіи безконечно малое можетъ быть замѣнено всякимъ другимъ, имѣющимъ съ нимъ отношеніе, стремящееся къ единицѣ.

Докажемъ на обоихъ случаяхъ исчисленія этотъ принципъ, который уже прилагался нами нѣсколько разъ (стр. 40 и 51), когда вмѣсто дуги, которая уменьшалась до нуля, мы брали ея хорду.

1) Исчисленіе отношенія.

Назовемъ черезъ α и α_1 два безконечно-малыхъ, т.-е. два малыхъ количества, которыя стремятся къ нулю и отношеніе которыхъ стремится къ предѣлу, который одинъ только и нужно вычислить. Предположимъ, что два другихъ безконечно-малыхъ, β и β_1, отличаются отъ α и α_1, но такимъ образомъ, что ихъ соотвѣтственныя отношенія къ α и α_1 стремятся къ единицѣ. Я утверждаю, что можно будетъ замѣнить отношеніемъ $\frac{\beta}{\beta_1}$ отношеніе $\frac{\alpha}{\alpha_1}$, не дѣлая ошибки въ предѣлѣ.

Дѣйствительно, такъ какъ $\frac{\beta}{\alpha}$ стремится къ единицѣ, то, если мы возьмемъ $\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \varepsilon$, ε будетъ обозначать *уничтожающееся* количество, т.-е. стремящееся къ нулю въ то же время, какъ и α. Точно такъ же будемъ имѣть $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 + \varepsilon_1$, называя черезъ ε_1 количество, аналогичное ε. Но изъ этихъ равенствъ получимъ

$$\beta = \alpha(1 + \varepsilon) \qquad \beta_1 = \alpha_1(1 + \varepsilon_1)$$

и далѣе

$$\frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon_1} \quad \text{или} \quad \frac{\frac{\beta}{\beta_1}}{\frac{\alpha}{\alpha_1}} = \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon_1}.$$

Въ предѣлѣ вторая часть $\frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon_1}$ обращается въ единицу и, такъ какъ два отношенія $\frac{\beta}{\beta_1}$ и $\frac{\alpha}{\alpha_1}$ точно такъ же, какъ частное одного на другое, приближаются безпрерывно къ своимъ соотвѣтственнымъ предѣламъ $\lim \frac{\beta}{\beta_1}$, $\lim \frac{\alpha}{\alpha_1}$ и 1, то получается

$$\frac{\lim \frac{\beta}{\beta_1}}{\lim \frac{\alpha}{\alpha_1}} = 1.$$

А это значитъ, что, если предѣлъ отношенія $\frac{\alpha}{\alpha_1}$ есть нуль или конечное число (это можно предположить, такъ какъ стараются его вычислить), то и предѣлъ отношенія $\frac{\beta}{\beta_1}$ будетъ вполнѣ таковъ.

2) Исчисленіе суммы.

Когда безконечное число безконечно-малыхъ слѣдуетъ въ видѣ алгебраической суммы, то берется всегда безконечное число этихъ членовъ съ однимъ и тѣмъ же знакомъ, потому что законъ относительной безпрерывности вещей заставляетъ ихъ варіировать постепеннымъ образомъ, именно такъ, чтобы каждый изъ этихъ членовъ отличался вообще отъ предыдущаго только безконечно-малой дробью своей собственной величины. Перемѣны знаковъ при переходѣ одного члена въ другой проявляются такимъ образомъ только на *дальнихъ разстояніяхъ;* а разсматриваемая сумма можетъ быть подраздѣлена на частныя суммы, составляющіяся каждая изъ безконечнаго числа членовъ одного и того же [illegible]

Итакъ, ограничимся одной изъ этихъ частныхъ суммъ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$ и допустимъ, что она стремится къ конечному предѣлу по мѣрѣ кого, какъ каждый изъ членовъ, обозначенныхъ буквой α, приближается къ нулю, тогда какъ ихъ число все болѣе и болѣе увеличивается. Я говорю, что можно замѣнить эту сумму $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$ суммой $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_n$, такъ какъ отношенія новыхъ безконечно-малыхъ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, къ предыдущимъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ стремятся къ единицѣ, т.-е. такъ какъ, называя черезъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ уничтожающіяся количества, имѣемъ

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 + \varepsilon_1, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1 + \varepsilon_2, \ldots, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1 + \varepsilon_n.$$

Это замѣщеніе непосредственно выводится изъ теоремы, уже нѣсколько разъ употребляемой, относительно ряда почленно складываемыхъ отношеній. Эти отношенія, имѣющія знаменателей одного и того же знака, суть $\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \ldots, \frac{\beta_n}{\alpha_n}$ и почленное сложеніе ихъ даетъ новое отношеніе, промежуточное между самымъ меньшимъ и самымъ большимъ, именно

$$\frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}.$$

Чтобы сократить время писанія, согласились представлять всякую сумму знакомъ Σ съ буквой, обозначающей различные члены суммы; такимъ образомъ $\Sigma\alpha$ (что читаютъ *сумма* или *сигма* α'ы), $\Sigma\beta$ будутъ со-

кращенные способы соотвѣтственнаго писанія $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$ и $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_n$. Новое промежуточное отношеніе будетъ выражаться черезъ $\frac{\Sigma\beta}{\Sigma\alpha}$, а такъ какъ надо допустить, что оно стремится къ 1 въ то же время, какъ всѣ отношенія $\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \ldots, \frac{\beta_n}{\alpha_n}$, то будемъ имѣть

$$\frac{\lim \Sigma\beta}{\lim \Sigma\alpha} = 1,$$

что очевидно доказываетъ теорему, когда предѣлъ $\Sigma\alpha$ есть или нуль или конечное число.

Точно такъ же можно было бы изъ соотношенія $\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \varepsilon$, которое вкратцѣ представляетъ всѣ тѣ, которыя даются соотвѣтственными отношеніями $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ къ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, вывести не менѣе общее выраженіе, $\beta - \alpha = \alpha\varepsilon$, разности $\beta - \alpha$, которая существуетъ между двумя соотвѣтствующими членами двухъ разсматриваемыхъ суммъ. Тогда, складывая всѣ частныя выраженія, которыя даетъ эта разность, когда послѣдовательно къ α и ε прибавить значки $1, 2, 3, \ldots, n$, — мы получимъ $\Sigma(\beta - \alpha) = \Sigma\alpha\varepsilon$. Но каждый членъ, $\alpha\varepsilon$, изъ $\Sigma\alpha\varepsilon$, сравниваемый съ членомъ того же ряда, α, изъ $\Sigma\alpha$, даетъ отношеніе ε, а $\Sigma\alpha\varepsilon$ имѣетъ, поэтому, съ $\Sigma\alpha$, все въ виду изложенной теоремы, отношеніе, промежуточное между самымъ меньшимъ и самымъ большимъ изъ ε, т.-е. нулевое въ предѣлѣ. Итакъ, получается $\lim \frac{\Sigma(\beta - \alpha)}{\Sigma\alpha} = 0$, откуда $\frac{\lim \Sigma\beta - \lim \Sigma\alpha}{\lim \Sigma\alpha} = 0$ и, слѣдовательно, $\lim \Sigma\beta = \lim \Sigma\alpha$.

Такимъ образомъ въ обоихъ случаяхъ исчисленія всякое безконечно-малое α можетъ быть замѣнено другимъ β, которое имѣетъ съ α отношеніе, стремящееся къ единицѣ, или выраженіе котораго есть $\beta = \alpha(1 + \varepsilon)$, если ε обозначаетъ уничтожающееся количество. Но такъ какъ это соотношеніе можетъ быть написано еще въ видѣ $\beta - \alpha = \alpha\varepsilon$, то разность $\beta - \alpha$ двухъ безконечно-малыхъ есть не что иное, какъ безконечно малая ε'ая часть одного изъ нихъ, α; и сказать, что два безконечно-малыхъ имѣютъ между собой отношеніе, стремящееся къ единицѣ, значитъ сказать, что они отличаются другъ отъ друга только безконечно-малой частью своей величины. Слѣдовательно, главный принципъ говорится еще такъ:

При исчисленіи можно замѣнить одно безконечно-малое другимъ, если только одно отличается отъ другого безконечно-мало по отношенію къ себѣ самому.

27. — Безконечно-малыя различныхъ порядковъ.

Итакъ, мы можемъ теперь заняться разсмотрѣніемъ безконечно-малыхъ, которыя безконечно меньше другихъ, почему и можно сказать, что существуютъ *безконечно-малыя различныхъ порядковъ*. Это кромѣ того позволитъ намъ лучше понять пользу важнаго принципа, который мы только что доказали.

Во всякомъ вопросѣ, гдѣ разсматриваются безконечно-малыя, одно изъ нихъ, которое мы обозначимъ черезъ α, будетъ членомъ сравненія со всѣми другими: его называютъ *главнымъ безконечно-малымъ*. Пусть β будетъ другимъ безконечно-малымъ, входящимъ въ разсматриваемый вопросъ. Очень часто это безконечно-малое бываетъ *сравниваемо* съ опредѣленной степенью, α^n, главнаго безконечно-малаго, т.-е. есть средство выбрать показателя n такъ, что, при α, стремящейся къ нулю, отношеніе $\frac{\beta}{\alpha^n}$ *остается конечнымъ* числомъ, не дѣлаясь нулемъ, и не увеличиваясь безпредѣльно [1]). Если обозначить черезъ K это число, то имѣемъ $\beta = K\alpha^n$, и тогда говорятъ, что безконечно-малая β — n'наго *порядка* [illegible].

Иногда однако, способъ, какимъ варіируетъ β въ видѣ функціи α'ы въ сосѣдствѣ съ значеніемъ нуля, сложнѣе, чѣмъ способы, которые выражаются различными степенями, даже имѣющими дробные показатели; тогда уже нельзя говорить о порядкѣ этого безконечно-малаго β.

---

*) Полезно замѣтить, что слово *конечное* должно понимать по общему смыслу фразы въ двухъ различныхъ положеніяхъ: или, какъ здѣсь, оно означаетъ то, что оно ни безконечно большое, ни безконечно малое; или его обозначеніе будетъ болѣе широкое или менѣе одностороннее, и будетъ прилагаемо ко *всему* тому, что не безконечно велико. Въ послѣднемъ смыслѣ употребляютъ спеціальный синонимъ *небезконечное* дѣйствительно, безконечно-малое, разсматриваемое, какъ имѣющее своей величиной *нуль*, а не безконечность уменьшающихся степеней, которыя проходитъ, чтобы достигнуть его, безпрерывное и неопредѣленно дѣлящееся количество, не есть безконечность, но нуль но съ этой точки зрѣнія оно получаетъ гораздо болѣе ясное, гораздо болѣе важное представленіе, чѣмъ всякое другое опредѣленное положеніе величины, противное тому, что мы получили для безконечности (*крайній* предѣлъ увеличивающагося количества), ясное представленіе о которой убѣгаетъ отъ насъ, или, такъ сказать, которую мы не можемъ разсмотрѣть подробно, хотя косвенная идея о томъ, что оно должно быть, какъ говорилъ Паскаль, абсолютно необходимо геометру.

Когда говорятъ не столько о количествѣ, сколько о *формѣ* или аналитическомъ выраженіи функціи, что она *конечна*, то подразумѣваютъ подъ этимъ, что предѣльнаго числа членовъ, множителей и т. д., алгебраическихъ или даже трансцендентныхъ, но природы, *считаемой извѣстной* достаточно для представленія этой функціи; короче, что она имѣетъ точное выраженіе этого не было бы, если бы она была только *преобразованіемъ* болѣе и болѣе сложныхъ выраженій, каковы часто — серіи безконечнаго числа членовъ, произведеніе безконечнаго числа множителей или еще *безпрерывная дробь*, т.-е. дробь, знаменатель которой содержитъ дробную часть, которая также имѣетъ въ знаменателѣ другую дробную часть и такъ далѣе до безконечности.

Но тогда говорятъ, чтобы не вводить новыхъ названій, что данное безконечно-малое порядка, высшаго n'наго, если его отношеніе къ α^n стремится къ нулю, и порядка, ниже n'наго, если, наоборотъ, его отношеніе къ α^n безпредѣльно увеличивается, когда α уничтожается.

Допустимъ, что мы имѣемъ безконечно-малое δ формы

$$\delta = A\alpha^m + B\alpha^{m+p} + C\alpha^{m+q} + \ldots,$$

гдѣ m, $m+p$, $m+q, \ldots$ означаютъ все бо́льшіе и бо́льшіе показатели. Я говорю, что можно просто замѣнить это безконечно-малое его первымъ членомъ, или, говоря иначе, *привести его выраженіе къ части порядка малости, менѣе возвышенной*, и написать $\delta = A\alpha^m$, пренебрегая всѣми послѣдующими членами. Дѣйствительно, эти послѣдніе безконечно-малы въ сравненіи съ сохраненнымъ такимъ образомъ членомъ $A\alpha^m$, такъ какъ, если раздѣлить равенство на $A\alpha^m$, то выйдетъ $\frac{\delta}{A\alpha^m} = 1 + \frac{B}{A}\alpha^p + \frac{C}{A}\alpha^q + \ldots$ Но такъ какъ α стремится къ нулю, то вторая часть — формы $1+\varepsilon$, а подставляя $A\alpha^m$ на мѣсто δ, замѣняютъ только одно безконечно-малое другимъ, отношеніе котораго къ первому стремится къ 1.

Доказанный принципъ, слѣдовательно, позволяетъ уничтожать въ формулѣ всѣ члены, кромѣ перваго. Послѣдній, будучи безконечно больше остальныхъ, въ нѣкоторомъ родѣ *прикрываетъ* ихъ вполнѣ и, пока онъ есть, не позволяетъ произойти какому-нибудь чувствительному измѣненію въ результатѣ. Получаемая ошибка отъ непринимaнія въ расчетъ слѣдующихъ членовъ дѣлается нулевой, когда переходятъ къ предѣлу.

28. Единство разложенія всякой функціи по восходящимъ степенямъ перемѣннаго.

Изъ всего вышесказаннаго между прочими примѣненіями можно вывести, что *функція въ сосѣдствѣ съ нулевымъ значеніемъ перемѣннаго не можетъ допускать нѣсколькихъ разложеній въ серію, расположенную по степенямъ, съ положительными показателями, этого перемѣннаго.*

Дѣйствительно, пусть даны двѣ *различныя* серіи формы

$$Ax^m + Bx^{m+p} + Cx^{m+q} + \ldots$$

Очевидно, разностью между ними будетъ третья серія той же самой формы съ коэффиціентами, которые всѣ — не нули. Если же заставить x стремиться къ нулю, то ея члены уничтожаются, дѣлая первый наименьшаго порядка малости, и онъ, не будучи въ состояніи, такимъ образомъ, сдѣлаться какимъ-либо другимъ, дѣлаетъ все выраженіе отличнымъ отъ нуля. Такимъ образомъ, два предположенныхъ разложенія, если они и равны при $x=0$, обязательно отличаются другъ отъ друга, какъ только

перемѣнное x не есть нуль, и эти разложенія образуютъ двѣ различныя функціи. Иначе говоря, двѣ сходящіяся серіи, расположенныя по возрастающимъ степенямъ перемѣннаго, не могутъ быть равными при всякихъ, очень малыхъ, значеніяхъ этого перемѣннаго безъ того, чтобы не быть тождественными.

Когда говорятъ о двухъ цѣлыхъ и конечныхъ полиномахъ по x, то ихъ тождественности вовсе даже не требуется для того, чтобы можно было съ увѣренностью заключить, что ихъ даютъ равными при всѣхъ, очень малыхъ, значеніяхъ перемѣннаго; дѣйствительно, если придать обоимъ степень, n напр., наивысшаго полинома, то будетъ достаточно, чтобы они равнялись другъ другу, когда x получаетъ n различныхъ значеній x_1, x_2, ..., x_n, для того, чтобы ихъ разность, полиномъ степени n, равнялась, какъ извѣстно, произведенію $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)$ на коэффиціентъ члена степени n и не могла уже, слѣдовательно, уничтожаться при $(n+1)$-номъ значеніи, x_0, x'а, если только этотъ коэффиціентъ самъ не нуль, что дѣлаетъ тождественными два разсматриваемыхъ полинома. Но это можно было предвидѣть, замѣчая, что, если заставить полиномъ степени n, $f(x) = A + Bx + Cx^2 + \dots + Dx^n$, получать, при $n+1$ данныхъ значеній, x_0, x_1, x_2, ..., x_n, x'а, $n+1$ точно такъ же обозначенныхъ значеній f_0, f_1, f_2, ..., f_n, то это выразится въ $n+1$ уравненіяхъ первой степени

$$A + Bx_0 + Cx_0^2 + \dots + Dx_0^n = f_0, \quad A + Bx_1 + Cx_1^2 + \dots + Dx_1^n = f_1, \dots,$$

имѣющихъ $n+1$ неизвѣстныхъ коэффиціентовъ A, B, C, ..., D. Итакъ естественно слѣдуетъ опредѣлить точно такъ же эти коэффиціенты или имѣть только одинъ полиномъ, отвѣчающій вопросу. Но это разсужденіе (прибавляя, при необходимости, еще какія-либо данныя для болѣе полнаго опредѣленія, въ случаѣ уравненія съ кратнымъ рѣшеніемъ) приложимо ко всякой алгебраической или трансцендентной функціи, формула которой будетъ содержать конечное число параметровъ, какъ A, B, C... Точно такъ же можно, напр. изъ безконечно-малой части кривой, имѣющей уравненіе конечной формы, вывести, вообще, всю эту кривую. Предыдущее разсужденіе показываетъ, что это справедливо только для извѣстной серіи, т.-е. для функцій, которыя въ своихъ выраженіяхъ содержатъ безконечное число параметровъ, но принужденныхъ, вслѣдствіе сходимости серіи, играть все болѣе и болѣе уничтожающуюся роль, когда номеръ ихъ порядка увеличивается, и, слѣдовательно, не увеличиваться слишкомъ быстро одинъ отъ другого.

29. — Безконечно-большія различныхъ порядковъ.

По противоположности съ безконечно-малыми различныхъ порядковъ иногда случается разсматривать между количествами, которыя безпредѣльно увеличиваются по своей абсолютной величинѣ, и *безконечности*

или безконечно-большія различныхъ порядковъ. Въ вопросахъ, гдѣ это происходитъ, количества, которыя неопредѣленно увеличиваются, зависятъ отъ одного изъ нихъ, называемаго *главнымъ безконечно-большимъ* и представляющагося, напр., выраженіемъ $\frac{1}{\alpha}$, гдѣ α стремится къ нулю. Но часто случается, что всякое другое разсматриваемое количество, которое увеличивается неопредѣленно, можетъ быть приравнено къ извѣстной степени, $\frac{1}{\alpha^n}$, главнаго безконечно-большого. Пусть β будетъ однимъ изъ такихъ количествъ; предположимъ, что отношеніе β къ $\frac{1}{\alpha^n}$ такимъ образомъ равно *конечному* числу K, т.-е. числу, которое не дѣлается въ предѣлѣ ни безконечностью, ни нулемъ. Тогда говорятъ, что безконечно-большое β есть n'аго *порядка великости*. Но если его способъ варіированія не походитъ вполнѣ на способъ варіированія степени отъ $\frac{1}{\alpha}$ (даже имѣющей дробные показатели), такъ что порядокъ n не можетъ быть опредѣленъ, то продолжаютъ тѣмъ не менѣе говорить, что безконечность β или высшаго, или низшаго, чѣмъ m напр. порядка, смотря по тому, увеличивается ли безпредѣльно, или стремится къ нулю отношеніе β къ $\frac{1}{\alpha^m}$.

Принципъ, аналогичный предыдущему при безконечно-малыхъ, приложимъ и къ исчисленію предѣльныхъ результатовъ, которые получаются при безконечно-большихъ, т.-е. неопредѣленно увеличивающихся, количествахъ. Всякій разъ, какъ количество будетъ состоять изъ нѣсколькихъ членовъ различныхъ порядковъ великости, можно будетъ привести его къ члену наиболѣе возвышеннаго порядка великости. Если имѣемъ напр. выраженіе

$$\delta = \frac{A}{\alpha^m} + \frac{B}{\alpha^{m-p}} + \frac{C}{\alpha^{m-q}} + \ldots,$$

гдѣ m, $m-p$, $m-q$,... суть уменьшающіеся показатели, то мы можемъ уничтожить всѣ члены исключая перваго. Дѣйствительно, разсматриваемое выраженіе можетъ быть написано

$$\delta = \frac{1}{\alpha^m}(A + B\alpha^p + C\alpha^q + \ldots) = \frac{A}{\alpha^m}\left(1 + \frac{B}{A}\alpha^p + \frac{C}{A}\alpha^q + \ldots\right).$$

Но такъ какъ α стремится къ нулю, то послѣдній множитель формы $1+\varepsilon$, и мы измѣнимъ выраженіе только на безконечно-малую часть его значенія, уничтожая всѣ остальныя, слѣдующія за первымъ, т.-е. во всемъ *конечномъ* результатѣ, зависящемъ отъ отношеній этихъ безконечно-большихъ, мы получаемъ только безконечно-малую въ сравненіи съ самимъ результатомъ ошибку и нулевую, слѣдовательно, въ предѣлѣ.

30. — Приложеніе тѣхъ же самыхъ принциповъ къ приблизительнымъ исчисленіямъ: очень малыя количества различныхъ порядковъ; послѣдовательныя приближенія.

Важный принципъ, позволяющій упрощать исчисленія безконечно-малыхъ или безконечно-большихъ, можетъ, слѣдовательно, выражаться въ слѣдующемъ видѣ: *всякое количество можетъ быть пренебрегаемо, когда оно имѣетъ передъ собой другое, несравненно большее, съ которымъ оно складывается или отъ котораго оно отнимается.* И въ этихъ исчисленіяхъ существуетъ несомнѣнная точность, такъ какъ ошибка, получаемая отъ примѣненія такого исчисленія, въ предѣлѣ дѣлается нулевой, а предѣлъ-то одинъ и хотятъ при этомъ разсматривать. Но приложеніе этого метода съ весьма достаточной точностью выполняетъ не менѣе важную роль въ приблизительныхъ исчисленіяхъ, которыя дѣлаютъ столь точными наши познанія о природѣ.

Дѣйствительно, извѣстно, что наилучшіе опыты требуютъ отъ насъ, для вычисленія настоящаго предмета, чиселъ съ тремя или четырьмя десятичными знаками, а иногда только съ двумя. Поэтому относительныя ошибки на $\frac{1}{10000}$ и менѣе, а слѣдовательно часто даже и $\frac{1}{1000}$, совершенно незамѣтны для наблюденія и могутъ поэтому совершенно не приниматься въ расчетъ. Достаточно будетъ, напр., чтобы количество было $\frac{1}{10000}$ или даже $\frac{1}{1000}$, какъ уже его квадратъ можетъ быть уничтоженъ безъ колебанія рядомъ съ первой степенью, отчего измѣнятся лишь очень отдаленныя десятичныя дроби, ускользающія отъ нашего измѣренія. Итакъ, при практическихъ исчисленіяхъ, относящихся къ этимъ количествамъ, различаютъ не безконечно-малыя различныхъ порядковъ, но *очень малыя количества различныхъ порядковъ*, соотвѣтственно равныя произведенію чиселъ, сравниваемыхъ съ единицей, на послѣдовательныя степени *главнаго*, очень малаго разсматриваемаго количества; и пренебрегаютъ, по крайней мѣрѣ, временно, въ каждомъ выраженіи членами, которые стоятъ рядомъ съ другими, менѣе высшаго порядка малости.

Тѣ случаи, гдѣ представляются такія малыя количества, очень часто встрѣчаются, либо потому, что очень многочисленныя явленія какъ въ мірѣ, гдѣ мы живемъ (сходномъ съ нашей организаціей), такъ и въ нашихъ правильныхъ аппаратахъ и механизмахъ, состоятъ изъ довольно слабыхъ измѣненій въ ту или другую сторону отъ извѣстныхъ положеній равновѣсія или извѣстныхъ способовъ быть однообразными, либо еще потому, что самая малость разсматриваемыхъ перемѣнныхъ дѣлаетъ при помощи допускаемыхъ ею приблизительныхъ упрощеній доступными нашимъ изысканіямъ, иначе бы неизвѣстные, законы, и такимъ образомъ сообщаетъ такимъ феноменамъ очень важный интересъ. Итакъ часто случается въ приблизительныхъ исчисленіяхъ прилагать

тотъ же принципъ, какой употребляется и при безконечно-малыхъ, пренебрегающій количествами очень малыми по отношенію къ другимъ, съ которыми они складываются или изъ которыхъ они вычитаются: эти послѣднія закрываютъ ихъ въ результатѣ и дѣлаютъ незамѣтными ошибки, получающіяся черезъ уничтоженіе первыхъ. Но когда въ алгебраической суммѣ большія количества вполнѣ уничтожаютъ другъ друга, тогда меньшія количества пріобрѣтаютъ важность: дѣйствительно они идутъ въ первомъ ряду и составляютъ результатъ, если при такихъ условіяхъ ищутъ его.

Но это бываетъ не только тогда, когда извѣстныя количества, какъ говорятъ, совершенно *незамѣтны* по отношенію къ другимъ, что и позволяетъ ими пренебрегать. Дѣйствительность обыкновенно бываетъ такъ сложна и поэтому математическія соотношенія, которыя ее изображаютъ, когда мы стараемся образовать ихъ, такъ *упорны* (*rebelles*, сохраняя слово Лагранжа), что мы никогда не сможемъ, такъ сказать, найти неизвѣстныя, если не допустимъ съ самаго начала, иногда очень значительную, ошибку, которая и позволитъ получить извѣстное представленіе о *данныхъ* или *результатахъ*-разсматриваемыхъ количествъ. Для этого уничтожимъ изъ уравненій все, что не годится для того, чтобы на его мѣсто поставить довольно простыя соотношенія, могущія дать намъ неизвѣстныя количества или функціи. Но значенія послѣднихъ соотношеній, опредѣленныя такимъ неточнымъ способомъ, вообще близки къ истиннымъ вслѣдствіе принципа относительной безпрерывности предметовъ, который требуетъ постепеннаго варіированія результатовъ, когда данныя или даже природа производимыхъ дѣйствій мало измѣняются.

Но разъ мы получимъ эти *первыя* приближенныя выраженія неизвѣстныхъ количествъ или функцій, вопросъ уже измѣнится; дѣйствительно, можно замѣнять ихъ сначала въ очень малыхъ и пренебрегаемыхъ членахъ, которые зависятъ отъ этихъ количествъ или функцій. Тогда они дѣлаются сами почти извѣстными; и задача, предложенная въ новой формѣ, имѣющей неизвѣстными лишь главные члены, вообще остается первоначальной всякій разъ, какъ можно рѣшить ее, сохраняя только эти самые члены. Итакъ, можно получить для требуемыхъ количествъ или функцій выраженія болѣе точныя, чѣмъ первыя: они даютъ то, что называютъ *вторымъ приближеніемъ*. Эти выраженія, подставленныя въ свою очередь на первое мѣсто въ пренебрегающихся членахъ, дѣлаютъ ихъ еще болѣе точными, а это позволяетъ получить *третье приближеніе* и т. д. до неопредѣленнаго конца или до извѣстнаго предѣла, зависящаго отъ природы вопроса. Обыкновенно достаточно, чтобы второе приближеніе было менѣе неточно, чѣмъ первое, что и позволяетъ смотрѣть на это, какъ на точку отправленія въ отыскапія предѣловъ.

Это производство, единственно употребляемое очень часто и дѣлающееся при посредствѣ все болѣе и болѣе точныхъ поправокъ, которыя

производятся надъ первымъ результатомъ, очень грубо приближеннымъ къ истинному значенію, — называется *методомъ послѣдовательныхъ приближеній*. Уже въ ариѳметикѣ мы видѣли его, какъ указаніе при дѣленія и извлеченіи корней, гдѣ цифра, выражающая все большія и большія единицы результата, есть единственная, которая можетъ сначала быть опредѣлена. Но алгебра показываетъ прекрасное примѣненіе его при болѣе и болѣе точномъ исчисленіи корней уравненія $f(x)=0$ при помощи того, что нѣкогда называлось въ ариѳметикѣ *методомъ двойного ложнаго допущенія* (т.-е. *предположенія*). Этотъ методъ состоитъ въ слѣдующемъ: думая, что a и b будутъ искомымъ корнемъ, мы получаемъ два значенія, $f(a)$ и $f(b)$, первой части $f(x)$, мало отличающіяся отъ нуля и (на сколько это возможно) разныхъ знаковъ; въ сосѣдствѣ съ ними, по принципу постепеннаго варіированія, мы предполагаемъ увеличенія $f(x)-f(a)$ функціи замѣтно пропорціональными увеличеніямъ $x-a$ перемѣннаго: слѣдовательно, можно написать, при помощи полученныхъ по предположенію данныхъ $x=a$ и $x=b$, почти точную пропорцію

$$\frac{f(x)-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}$$

и взять, слѣдовательно, исключая послѣдующій контроль, для искомаго корня, уничтожающаго $f(x)$, величину,

$$x=a+\frac{f(a)}{f(a)-f(b)}(b-a)$$

31. — Раздѣленіе Анализа безконечно-малыхъ на дифференціальное и интегральное исчисленіе.

Такъ какъ безконечно-малыя могутъ быть вводимы въ исчисленія двумя способами, приводящими къ конечнымъ и опредѣленнымъ, но безконечно разнообразнымъ въ каждомъ разѣ, результатамъ, то Анализъ безконечно-малыхъ подразумѣваетъ двѣ большихъ части, прилагаемыхъ спеціально, одна къ первой изъ этихъ категорій операцій, которая имѣетъ дѣло съ исчисленіемъ отношеній безконечно-малыхъ, другая же къ той, которая имѣетъ дѣло съ исчисленіемъ суммы безконечнаго ряда безконечно-малыхъ.

Въ первой части прибавляютъ къ независимымъ перемѣннымъ безконечно-малыя увеличенія, положительныя и отрицательныя, и смотрятъ, въ какихъ отношеніяхъ съ этими увеличеніями находятся увеличенія, которыя получаются вслѣдствіе того же самаго функціями. Итакъ, здѣсь вычисляютъ отношенія безконечно-малыхъ *разностей* (différences). Поэтому эта часть называется *дифференціальнымъ исчисленіемъ*.

Во второй же, наоборотъ, имѣютъ даннымъ формулу, которая выражаетъ послѣдовательныя безконечно-малыя увеличенія функціи, и же-

лаютъ получить сумму ихъ, чтобы затѣмъ перейти отъ безконечно-малой разности къ самой функціи. Итакъ, здѣсь такимъ образомъ будутъ соединять безконечно-малые элементы количества, чтобы возстановить его въ его *интегральномъ* или цѣльномъ значеніи. Отсюда и названіе *интегральнаго исчисленія*, которое даютъ этой части Анализа безконечно-малыхъ.

ГЛАВА IV.

Обозначенie дифференцiаловъ. Дифференцированie простыхъ и сложныхъ функцiй.

32. — Дифференцiалы перемѣннаго и функцiи.

Пусть $y = f(x)$ будетъ какой-либо функцiей перемѣннаго x. Мы видѣли во второй главѣ (стр. 31), что, если x и y получатъ два очень малыхъ, *одновременныхъ* увеличенiя Δx и Δy, то будемъ имѣть формулу

$$\Delta y = [f'(x) + \varepsilon] \Delta x,$$

гдѣ ε обозначаетъ очень малое количество, функцiю x'а и Δx, которая стремится вмѣстѣ съ Δx къ нулю. Эта формула впрочемъ выражаетъ только то, что существуетъ производная y' или $f'(x)$; дѣйствительно, достаточно взять ее въ формѣ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$, чтобы увидѣть, что по причинѣ смысла *уничтожающагося* количества, придаваемаго ε, отношенiе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ неопредѣленно приближается къ предѣлу $f'(x)$, когда Δx приближается къ нулю. Но, написавъ въ формѣ

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \varepsilon \Delta x,$$

допустимъ, что это выраженiе Δy должно быть вычислено, при помощи какихъ-либо исчисленiй, болѣе или менѣе сложныхъ, но производимыхъ единственно для того, чтобы найти предѣлы, къ которымъ стремятся ихъ результаты, когда всѣ малыя разности, какъ Δx или Δy уничтожаются. Тогда Δx и Δy сдѣлаются тѣмъ, что мы называемъ *безконечно-малыми*, т.-е. очень малыми, дѣйствительно *конечными* количествами, которыя подчинены, слѣдовательно, всѣмъ обыкновеннымъ законамъ счисленiя, но комбинацiи которыхъ могутъ быть утилизированы только тогда, когда ихъ собственная абсолютная величина, уничтожаясь, достигаетъ крайней степени малости. Точно такъ же эти увеличенiя Δx и Δy, которыя назывались до сихъ поръ *конечными разностями*, прини-

маютъ теперь другое имя, уменьшенное изъ предыдущаго*) и данное имъ Лейбницемъ: они называются *дифференціалами*. Въ то же самое время вмѣсто представленія ихъ буквой Δ ихъ представляютъ, также слѣдуя Лейбницу, буквой d. Такъ какъ, кромѣ того, $f'(x)$ должна быть вообще конечной (я хочу сказать, что она отличается отъ нуля), и такъ какъ ε стремится къ нулю, то членъ $\varepsilon\Delta x$ въ предыдущемъ выраженіи Δy есть членъ порядка малости, высшаго, чѣмъ членъ $f'(x)\Delta x$. Поэтому, слѣдуя важному принципу, позволяющему упрощать исчисленія безконечно-малыхъ, можно упростить выраженіе Δy; дѣйствительно относительная ошибка, получаемая вслѣдствіе этой перемѣны, въ предѣлѣ уничтожается, если только хотятъ разсматривать одинъ предѣлъ. Такимъ образомъ, *вслѣдствіе того, что можно замѣнить Δ черезъ d*, можно привести формулу Δy къ

$$dy = f'(x)dx,$$

формулѣ, выражающей, что *дифференціалъ функціи равенъ произведенію производной отъ этой функціи на дифференціалъ перемѣннаго.*

Въ другихъ словахъ, разъ замѣняютъ слова *„конечная разность“* словомъ *дифференціалъ*, или знакъ Δ — знакомъ d, то этимъ выражаютъ единственное желаніе вычислять только *предѣльные результаты*, т.-е. дѣлать только то, чтобы выраженіе dy въ различныхъ исчисленіяхъ окончательно уничтожало въ результатахъ всѣ дифференціалы, подобные dx и dy; и это-то даетъ право въ самомъ началѣ упрощать формулы, уничтожая члены, которые не могутъ уже вліять на эти результаты въ тотъ единственный моментъ, въ которыхъ ихъ и хотятъ знать.

Дифференціалъ, слѣдовательно, не обозначаетъ вполнѣ, или какъ говорятъ, *объективно* очень малой конечной разности; онъ обозначаетъ ее только субъективно, т.-е., по нашему понятію, обозначаетъ ее *напряженіемъ*, съ которымъ мы заставляемъ ее стремиться къ нулю и разсматриваемъ только предѣлы, къ которымъ будутъ стремиться результаты исчисленій. Идея, которую имѣлъ Лейбницъ, заставлять подобное напряженіе фигурировать въ формулахъ, такъ же проста, какъ и замѣчательна, такъ какъ она позволяетъ производить уничтоженія, нисколько не нарушая правильности формулъ.

Теперь скажемъ нѣсколько словъ про исключительный случай, когда при разсматриваемомъ значеніи x'а производная $f'(x)$ будетъ нулемъ. Тогда ε не уничтожается уже рядомъ съ $f'(x)$ и уже нельзя будетъ писать $dy = f'(x)dx$, т.-е. $dy = 0 \times dx = 0$. Между тѣмъ продолжаютъ даже и въ этомъ случаѣ полагать, что $dy = f'(x)dx$, потому что, исключая очень рѣдкіе случаи, можно сравнивать дифференціалъ dy функціи только съ такими дифференціалами, каковъ дифференціалъ ея перемѣнаго,

---

*) По-французски: разность — différence, дифференціалъ — différentielle.

т.-е. только съ количествами одного и того же порядка малости dx'а: Но отношеніе $\frac{dy}{dx}$, приводимое тогда къ ε или къ аналогичному уничтожающемуся количеству, уничтожается въ предѣлѣ, и, слѣдовательно, не будетъ ошибкой взять просто $dy = 0$. Итакъ можно даже и въ этомъ случаѣ писать $dy = f'(x)dx$, но съ *указанной оговоркой* не сравнивать dy съ количествами порядка малости, болѣе низшаго, чѣмъ порядокъ dx.

33. — Лейбницевскія обозначенія производныхъ. Дифференцированіе простыхъ функцій.

Формула $dy = f'(x)dx$ даетъ $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, соотношеніе, которое можно разсматривать, какъ непосредственное, или какъ выражающее нисколько не хуже, если даже не лучше, чѣмъ предыдущее $\Delta y = [f'(x) + \varepsilon]\Delta x$, основное доказательство существованія производной. Дѣйствительно, достаточно увидѣть дробь написанною въ видѣ $\frac{dy}{dx}$, чтобы заключить двѣ вещи:

1) что вопросъ идетъ объ отношеніи двухъ очень малыхъ *одновременныхъ* увеличеній, dy и dx, функціи и перемѣннаго; и

2) что по напряженію, выражающемуся буквой d, это есть не самое отношеніе въ его дѣйствительномъ положеніи, которое разсматриваютъ, но единственно *его предѣльное значеніе* въ тотъ моментъ, когда dx и dy уничтожаются.

Итакъ, можно разсматривать *частное дифференціала функціи на дифференціалъ перемѣннаго, какъ самое опредѣленіе производной*. И это замѣчаніе Лейбница относительно образованія такой производной $\frac{dy}{dx}$ имѣетъ передъ производной Ньютона или Лагранжа то преимущество, что она способна выражать все то, въ чемъ заключается сущность производной Напротивъ, ньютоновское обозначеніе y' — гораздо темнѣй даже и тогда, когда, чтобы сдѣлать ее болѣе ясною, заставляютъ перемѣнное фигурировать въ видѣ знака внизу, какъ напр. y'_x. Такимъ образомъ существуютъ два обозначенія, но берутъ во всякомъ случаѣ то, которое удобнѣй.

Очевидно, что искать дифференціалъ функціи или ея производную — двѣ равнозначащія операціи, такъ какъ второе изъ этихъ выраженій есть не что иное, какъ первое, раздѣленное на dx. Эти операціи, но въ особенности первая, называются *дифференцированіемъ* функціи: такимъ образомъ, *дифференцировать* функцію значитъ выполнить какую-либо одну изъ двухъ вышеуказанныхъ операцій.

Исчисленія производныхъ, производимыя нами во второй главѣ, приводятъ для наиболѣе простыхъ функцій къ истиннымъ правиламъ

дифференцированія, между которыми мнѣ достаточно будетъ высказать слѣдующія:

1) *дифференціалъ суммы или разности нѣсколькихъ количествъ есть сумма или разность дифференціаловъ этихъ количествъ;*

2) *дифференціалъ произведенія постояннаго множителя на перемѣнный есть произведеніе дифференціала перемѣннаго множителя на постоянный множитель;*

3) *дифференціалъ всякаго произведенія есть сумма членовъ, получающихся отъ умноженія дифференціала каждаго множителя на произведеніе другихъ множителей;*

4) *дифферціалъ частнаго получится, если раздѣлить на квадратъ дѣлителя разность между произведеніемъ этого дѣлителя на дифференціалъ дѣлимаго и произведеніемъ дѣлимаго на дифференціалъ того же самаго дѣлителя;* etc

34. — Дифференцированіе функціи отъ функціи.

Когда мы доказывали соотношеніе $dy=f'(x)dx$, то x разсматривалось, какъ какое-то перемѣнное, отъ котораго зависѣло y, но не какъ самостоятельное перемѣнное. Но формула эта — общая и можетъ быть прилагаема даже и тогда, когда x будетъ функціей настоящаго независимаго перемѣннаго, называемаго напр. черезъ t. Дѣля $dy=f'(x)dx$ на dt, получаемъ

$$\frac{dy}{dt}=f'(x)\,\frac{dx}{dt},$$

истинное соотношеніе даже въ исключительномъ случаѣ, когда производная $f'(x)$ будетъ нулемъ и можетъ быть замѣнена, какъ мы видѣли, ε; дѣйствительно въ разсматриваемомъ предѣлѣ ε уничтожается такъ же, какъ и $f'(x)$.

Такимъ образомъ производная отъ y, по отношенію къ независимому перемѣнному t, есть произведеніе $f'(x)$'а на производную отъ x; поэтому можно высказать слѣдующій принципъ:

Производная функціи другой функціи получается отъ умноженія того, чѣмъ была бы эта производная, если бы функція, отъ которой она зависитъ, была бы независимымъ перемѣннымъ, — на производную этой функціи.

Но и x самъ по себѣ можетъ не выражаться непосредственно черезъ t. Это бываетъ, когда онъ зависитъ отъ него только черезъ посредство другого перемѣннаго u. Предположимъ, что имѣется $x=\varphi(u)$ и наконецъ, чтобы не увеличивать сверхъ мѣры число промежуточныхъ перемѣнныхъ, $u=\psi(t)$. Соотношенія $y=f(x)$, $x=\varphi(u)$, $u=\psi(t)$ дадутъ послѣдовательно

$$\frac{dy}{dt}=f'(x)\,\frac{dx}{dt},\quad \frac{dx}{dt}=\varphi'(u)\,\frac{du}{dt},\quad \frac{du}{dt}=\psi'(t).$$

Затѣмъ получится, если подставить каждый изъ этихъ результатовъ въ предыдущій,

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)\varphi'(u)\psi'(t).$$

Такимъ образомъ, *когда какое-либо количество зависитъ отъ функціи, которая въ свою очередь есть функція функціи, то его производная получается отъ умноженія другъ на друга производныхъ всѣхъ функцій, входящихъ въ его выраженіе, производныхъ, взятыхъ, для каждаго перемѣннаго, по отношенію къ слѣдующему перемѣнному, отъ котораго она непосредственно зависитъ.*

Важно знать, какъ производить эти дифференцированія, не прибѣгая къ спеціальному наименованію, какъ напр. x, u, etc., промежуточныхъ перемѣнныхъ, но оставляя каждому изъ нихъ его детальное выраженіе. Извѣстно, что, чтобы представить множество способовъ разнообразныхъ варіированій, происходящихъ съ количествами, при помощи простыхъ функцій въ маломъ числѣ, разсмотрѣнныхъ нами во второй главѣ, — надо прибѣгнуть къ болѣе или менѣе сложнымъ комбинаціямъ этихъ простыхъ функцій, т.-е. иногда вплоть до истинныхъ соотношеній между функціями отъ функцій. Вотъ примѣръ, который я возьму изъ проблемы практической механики*). Пусть

$$z = \sin\left(\frac{k}{2}\lg\frac{l+x}{l-x}\right),$$

гдѣ k и l означаютъ два постоянныхъ. Разсматривая сначала $\frac{k}{2}\lg\frac{l+x}{l-x}$, затѣмъ $\lg\frac{l+x}{l-x}$, затѣмъ $\frac{l+x}{l-x}$, наконецъ $l+x$, $l-x$, какъ всѣ промежуточныя перемѣнныя между z и x, будемъ имѣть соотвѣтственно:

$$dz = \cos\left(\frac{k}{2}\lg\frac{l+x}{l-x}\right)d\left(\frac{k}{2}\lg\frac{l+x}{l-x}\right),$$

$$d\left(\frac{k}{2}\lg\frac{l+x}{l-x}\right) = \frac{k}{2}d\lg\frac{l+x}{l-x},$$

$$d\lg\frac{l+x}{l-x} = \frac{l-x}{l+x}d\frac{l+x}{l-x},$$

$$d\frac{l+x}{l-x} = \frac{(l-x)d(l+x)-(l+x)d(l-x)}{(l-x)^2},$$

$$d(l+x) = dx,\quad d(l-x) = -dx.$$

*) Проблема сжатія эластичнаго, горизонтально положеннаго, неплотнаго и прикрѣпленнаго на обоихъ концахъ, бруска, вслѣдствіе давленія, которое съ постоянной скоростью проходитъ отъ одного конца до другого. См. Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, etc. p. 569). Функція, которую я здѣсь называю черезъ z, входитъ въ выраженіе малаго вертикальнаго перемѣщенія катящагося груза.

Отъ замѣны же, которую можно здѣсь сдѣлать, и дѣленія на dx, получаемъ въ концѣ концовъ

$$\frac{dz}{dx} \quad \text{или} \quad z' = \left[\cos\left(\frac{k}{2} \lg \frac{l+x}{l-x}\right)\right] \frac{k}{2} \frac{l-x}{l+x} \frac{2l}{(l-x)^2}$$

$$= \frac{kl}{l^2 - x^2} \cos\left(\frac{k}{2} \lg \frac{l+x}{l-x}\right).$$

35. — Дифференцированіе сложныхъ функцій.

Перейдемъ теперь къ случаю, когда данная функція y зависитъ отъ x черезъ посредство нѣсколькихъ функцій u, v, w этого перемѣннаго x: иначе говоря, предположимъ, что y будетъ извѣстной *сложной функціей* $f(u, v, w)$. Тогда рядомъ съ затрудненіемъ разсматривать нѣсколько перемѣнныхъ u, v, w представляется преимущество получить дѣйствительное увеличеніе Δy функціи при данномъ измѣненіи Δx независимаго перемѣннаго, если заставить варіировать u, v, w одно за другимъ, хотя на самомъ дѣлѣ u, v, w всѣ за разъ получаютъ свои увеличенія Δu, Δv, Δw, одновременныя съ Δx. Дѣйствительно, можно заставить функцію f послѣдовательно проходить вполнѣ опредѣленныя состоянія $f(u, v, w)$, $f(u+\Delta u, v, w)$, $f(u+\Delta u, v+\Delta v, w)$, $f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)$, каждое изъ которыхъ отличается отъ предыдущаго тѣмъ, что въ немъ измѣняется болѣе перемѣнныхъ. Такъ какъ первое и послѣднее выражаютъ два значенія y и $y+\Delta y$ разсматриваемой функціи x'а, то разность Δy будетъ равняться суммѣ частныхъ увеличеній, испытываемыхъ функціей f во время перехода отъ одного изъ этихъ состояній къ слѣдующему.

Первое частное увеличеніе, $f(u+\Delta u, v, w) - f(u, v, w)$, называется *разностью* функціи f *по отношенію къ* u и пишется черезъ $\Delta_u f(u, v, w)$, обозначая своимъ знакомъ внизу — u, что варіируетъ одно перемѣнное u. Ея отношеніе къ Δu очевидно стремится, если Δu уменьшается, къ производной функціи, получающейся при томъ условіи, что перемѣннымъ служитъ только u, а v и w играютъ роль постоянныхъ. Эта производная будетъ зависѣть, вообще, отъ v и w, которые, смотря по своимъ дѣйствительнымъ значеніямъ, точно такъ же не вліяютъ на способъ, какимъ теперь варіируетъ f съ u; но она будетъ исчисляться съ помощью обыкновенныхъ правилъ дифференцированія функцій одного перемѣннаго. Ее называютъ *частной производной* функціи *по отношенію къ* u и представляютъ черезъ $f'_u(u, v, w)$ или (см. примѣчаніе къ IV главѣ) черезъ $\frac{\partial f}{\partial u}$, при чемъ знаменатель „$\partial u$“ достаточно указываетъ въ этомъ послѣднемъ случаѣ, что измѣняется перемѣнное u. Если бы нужна была еще бо́льшая точность, то знакъ въ числителѣ указывалъ бы перемѣнное, измѣненіе котораго влечетъ разсматриваемое увеличеніе df функціи:

это писали бы черезъ $\partial_u f$; но обыкновенно отъ этого избавляются. Отношеніе $\Delta_u f$ къ Δu, имѣющее такимъ образомъ для предѣла $\frac{\partial f}{\partial u}$ или $f'_u(u, v, w)$, можетъ выражаться черезъ $\frac{\partial f}{\partial u} + \varepsilon$ или черезъ $f'_u(u, v, w) + \varepsilon$, если ε обозначаетъ функцію u, v, w и Δu, уничтожающуюся въ то же время, какъ и Δu. Поэтому получаемъ

$$(1) \qquad f(u + \Delta u, v, w) - f(u, v, w) = [f'_u(u, v, w) + \varepsilon]\,\Delta u.$$

Слѣдующее частное увеличеніе $f(u + \Delta u, v + \Delta v, w) - f(u + \Delta u, v, w)$, которое можно написать черезъ $\Delta_v f(u + \Delta u, v, w)$, будетъ точно такъ же имѣть для своего предѣльнаго отношенія къ Δv, при томъ условіи, что Δv стремится къ нулю, *производную* функціи f *по отношенію* къ v, т.-е. получающуюся при разсматриваніи остальныхъ перемѣнныхъ, кромѣ v, за постоянныя. Эта производная будетъ писаться черезъ $f'_v(u + \Delta u, v, w)$ или $\frac{\partial f(u + \Delta u, v, w)}{\partial v}$, а не черезъ $f'_v(u, v, w)$ или $\frac{\partial f}{\partial v}$, такъ какъ первое перемѣнное, которое принимается за постоянное, имѣетъ теперь значеніе $u + \Delta u$: обстоятельство, которое надо отмѣтить. Но, такъ какъ мы допустили, вообще, безпрерывность функцій, то $f'_v(u + \Delta u, v, w)$ отличается отъ $f'_v(u, v, w)$ только количествомъ, которое уничтожается въ то же время, какъ и Δu; отсюда слѣдуетъ, что разность между $\frac{\Delta_v f(u + \Delta u, v, w)}{\Delta v}$ и $f'_v(u, v, w)$ есть извѣстная функція ε_1 отъ u, v, w, Δu и Δv, которая стремится къ нулю, когда Δu и Δv въ то же время стремятся къ нему. Поэтому имѣемъ

$$(2) \qquad f(u + \Delta u, v + \Delta v, w) - f(u + \Delta u, v, w) = [f'_v(u, v, w) + \varepsilon_1]\,\Delta v.$$

Наконецъ, послѣднее частное увеличеніе

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u + \Delta u, v + \Delta v, w)$$

будетъ имѣть свое отношеніе къ Δw, выражающееся въ предѣлѣ, если Δw уничтожается, черезъ *частную производную* по отношенію къ w, $f'_w(u + \Delta u, v + \Delta v, w)$, приводимую къ $f'_w(u, v, w)$ или $\frac{\partial f}{\partial w}$ съ сколь угодно малой ошибкой, когда разности Δu и Δv дѣлаются, обѣ за разъ, достаточно близкими къ нулю. Слѣдовательно, называя черезъ ε_2 функцію отъ u, v, w, Δu, Δv, Δw, уничтожающуюся вмѣстѣ съ Δu, Δv и Δw,— можно написать

$$(3) \; f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u + \Delta u, v + \Delta v, w) = [f'_w(u, v, w) + \varepsilon_2]\,\Delta w.$$

Итакъ требуемое увеличеніе Δy, сумма предыдущихъ (1), (2) и (3), будетъ выраженіемъ

$$4)\ \Delta y = [f'_u(u, v, w) + \varepsilon]\Delta u + [f'_v(u, v, w) + \varepsilon_1]\Delta v + [f'_w(u, v, w) + \varepsilon_2]\Delta w.$$

Замѣтимъ, что Δx а, слѣдовательно, и Δu, Δv, Δw, Δy должны стремиться къ нулю и будутъ вычисляться только для того, чтобы получить ихъ предѣлы отношеній или суммъ. Тогда Δx, Δu, Δv, Δw, Δy дѣлаются дифференціалами dx, du, dv, dw, dy, и ε, ε_1, ε_2, безконечно-малыя, уничтожаются рядомъ съ производными f'_u, f'_v, f'_w, вообще отличающимися отъ нуля. Даже въ исключительномъ случаѣ, когда всѣ эти частныя производныя уничтожаются при выбранныхъ значеніяхъ u, v, w, можно очень часто сравнивать dy только съ дифференціалами порядка du, dv, dw; (нулевой) предѣлъ отношенія, вычисляемый при этихъ условіяхъ точно такъ же получится, уничтожая снова ε, ε_1 ε_2 формулы (4). Въ концѣ концовъ мы получимъ

$$(5) \qquad dy = f'_u du + f'_v dv + f'_w dw = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}dw.$$

Наконецъ, раздѣляя по dx, мы получимъ

$$(6) \qquad y' \text{ или } \frac{dy}{dx} = f'_u u' + f'_v v' + f'_w w' = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

Такимъ образомъ, *дифференціалъ и производная сложной функціи равны двумъ соотвѣтственнымъ суммамъ произведеній, которыя получаются отъ умноженія или дифференціала, или производной каждой изъ функцій, отъ которыхъ эта функція непосредственно зависитъ, на соотвѣтствующую частную производную одной и той же сложной функціи.*

Часто случается, что независимое перемѣнное x фигурируетъ въ числѣ самихъ перемѣнныхъ u, v, w сложной функціи. Это можно приложить, напр., къ $f(x, v, w)$, при чемъ v и w продолжаютъ быть болѣе или менѣе сложными (compliquées) функціями x'а, но u дѣлается самой простой функціей, какова x. Тогда нужно избѣгать смѣшиванія собственно-частной производной отъ f по x, получающейся безъ варіированія v и w, съ искомымъ предѣльнымъ отношеніемъ $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{df}{dx}$, которое есть также производная, взятая по отношенію къ x, но *производная полная*, получаемая, если заставить варіировать все то, что зависитъ отъ x, именно x, v, w. Для этого полную производную представляютъ черезъ $\frac{d_t f}{dx}$, выражая символомъ d_t *полный* дифференціалъ, а обозначеніе $\frac{\partial f}{\partial x}$ остается для обо-

значенія частной производной $\frac{f(x+dx, v, w) - f(x, v, w)}{dx}$. Слѣдовательно, будемъ имѣть, напр., по (6)

(7) $$\frac{d_c f(x, v, w)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} v' + \frac{\partial f}{\partial w} w'.$$

36. — Употребленіе приближеннаго выраженія малыхъ увеличеній функцій въ приближенныхъ исчисленіяхъ и въ интерполяціи при помощи пропорціональныхъ частей.

Можно замѣтить, что формула (4) была построена, въ концѣ концовъ, при абсолютно произвольныхъ значеніяхъ u, v, w, Δu, Δv, Δw и что она выражала такимъ образомъ положительныя или отрицательныя увеличенія Δf безпрерывной функціи $f(u, v, w)$ какого угодно числа перемѣнныхъ, u, v, w. Но кромѣ того она можетъ сократиться, уничтожая свои члены $\varepsilon \Delta u$, $\varepsilon_1 \Delta v$, $\varepsilon_2 \Delta w$, въ приближенныхъ исчисленіяхъ, гдѣ увеличенія Δu, Δv, Δw, не будучи безконечно-малыми, остаются такъ малы, что ε, ε_1, ε_2 могутъ быть уже незамѣтными или, хотя временно, быть пренебрегаемыми дробями частныхъ производныхъ f'_u, f'_v, f'_w функціи. Тогда получаемъ

(8) $$\Delta f = (\text{замѣтно})\ f'_u \Delta u + f'_v \Delta v + f'_w \Delta w.$$

Итакъ, *когда перемѣнныя какой-либо функціи получаютъ лишь очень малыя измѣненія Δu, Δv, Δw, .., начиная съ извѣстныхъ опредѣленныхъ значеній u, v, w..., то соотвѣтствующія измѣненія функціи зависятъ отъ нихъ почти линейно, т.-е. разлагаются съ ошибкой, относительно очень слабой, на члены, изъ которыхъ каждый равенъ произведенію одного изъ малыхъ перемѣнныхъ Δu, Δv, Δw,... на постоянный коэффиціентъ.*

Предположимъ, что дѣло идетъ напр. о рѣшеніи системы уравненій формы $f(u, v,..) = 0$, и что требуется, хотя бы даже съ помощью многократныхъ попытокъ, найти приблизительныя значенія u, v... корней. Тогда настоящими *неизвѣстными* задачи будутъ маленькія *поправки* Δu, Δv,..., которыя надо приложить къ приблизительнымъ значеніямъ u, v,.., т.-е. такія поправки, которыя, будучи прибавлены соотвѣтственно къ u, v,..., будутъ давать истинные корни $u + \Delta u$, $v + \Delta v$,..., или будутъ вполнѣ уничтожать первыя части, какъ $f(u + \Delta u, v + \Delta v,...)$, уравненій. Увеличеніе $\Delta f = f(u + \Delta u, v + \Delta v,...) - f(u, v,..)$ функціи f будетъ имѣть, слѣдовательно, малое значеніе $- f(u, v,...)$, уже дѣлающееся извѣстнымъ по исчисленію первой части $f(u, v,...)$, производимому ранѣе для увѣренности въ томъ, что u, v,... были приближенныя значенія. Но, съ другой стороны, это увеличеніе Δf можетъ, по (8), быть

представлено въ формѣ $A\Delta u + B\Delta v + \ldots$, если назвать черезъ A, B,... или частныя производныя отъ $f(u, v, \ldots)$, взятыя при полученныхъ приближенныхъ значеніяхъ u, v,..., или другіе коэффиціенты, очень мало отличающіеся отъ этихъ производныхъ. Поэтому получится вмѣсто уравненія

$$f(u + \Delta u,\ v + \Delta v, \ldots) = 0$$

соотношеніе

$$A\Delta u + B\Delta v + \ldots = -f(u, v, \ldots)$$

первой степени по отношенію къ неизвѣстнымъ Δu, Δv, .. Такъ какъ то же самое получится и изъ другихъ данныхъ уравненій, то рѣшаемая система, даже будучи сначала запутанной, приводится къ первой степени; и ея рѣшеніе, производящееся безъ труда по извѣстному элементарному методу, дастъ значенія $u + \Delta u$, $v + \Delta v$,..., гораздо болѣе точныя, чѣмъ первыя u, v,... Поступая съ этими новыми значеніями, какъ мы поступали съ u, v,..., мы получимъ значенія, еще болѣе точныя, если только это требуется; и такъ далѣе.

Что касается до коэффиціентовъ A, B,... то ихъ можно взять равными частнымъ производнымъ отъ $f(u, v, \ldots)$, если эти послѣднія удобны для вычисленія. Если же нѣтъ, когда это будетъ видно ранѣе пробы нѣсколькихъ системъ $u + \Delta u$, $v + \Delta v$,... неизвѣстныхъ значеній, различныхъ, но близкихъ къ системѣ u, v,..., которая получилась, какъ первое приближеніе, и когда число ихъ, вообще, будетъ по крайней мѣрѣ равно числу неизвѣстныхъ, — то можно воспользоваться этими попытками, которыя такимъ образомъ прямо дадутъ столько же *точныхъ* значеній Δf'а для образованія между A, B,... одинаковаго числа уравненій первой степени формы

$$(\Delta u)A + (\Delta v)B + \ldots = \Delta f.$$

Однако ихъ извѣстныя вторыя части Δf отличаются относительно мало отъ того, что онѣ имѣли бы, если бы ихъ вычислить по, только приближенной, формулѣ (8), т.-е., если бы ввести въ первыя части вмѣсто A, B,... точныя частныя производныя $f'_u(u, v, \ldots)$, $f'_v(u, v, \ldots)$. Итакъ, рѣшеніе этой системы уравненій первой степени даетъ для коэффиціентовъ A, B,... вполнѣ возможныя значенія, очень близкія къ f'_u, f'_v,... Этотъ методъ будетъ единственно возможный въ извѣстныхъ случаяхъ, въ особенности, когда получаютъ функціи $f(u, v, \ldots)$ въ видѣ сходящейся серіи, получающейся изъ расходящейся посредствомъ дифференцированія, что возможно (см. часть II).

Кромѣ того, въ линейномъ приближенномъ выраженіи Δf'а коэффиціенты A, B,..., опредѣленные такимъ образомъ, вообще не представляютъ никакой помѣхи для точности производныхъ f'_u, f'_v,..., болѣе удобныхъ только въ случаѣ безконечно-малыхъ увеличеній Δu,

$\Delta v, \ldots$; все-таки часто предпочитаютъ и ихъ. Это происходитъ, напр., въ случаѣ одного только перемѣннаго $u = x$: если назвать черезъ a и b два, довольно близкія другъ отъ друга, значенія, между которыми должно варіировать x, то малое увеличеніе $f(x) - f(a)$, которое можно выразить приблизительно черезъ $A(x - a)$, вообще образуется лучше, если опредѣлить A изъ уравненія $f(b) - f(a) = A(b - a)$, т.-е. взять разсматриваемое точное увеличеніе при второмъ предѣлѣ $x = b$ совершенно такимъ же, какъ и при первомъ $x = a$, чѣмъ тогда, когда взять $A = f'(a)$; а это дѣлаетъ его наивозможно приближеннымъ въ сосѣдствѣ съ $x = a$, или дѣлаетъ отношеніе $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ точнымъ при этомъ предѣлѣ и, напротивъ, все болѣе и болѣе неточнымъ по мѣрѣ удаленія его отъ этого предѣла, т.-е. въ самые моменты, когда въ искомомъ выраженіи $f(x) - f(a)$ множитель $x - a$, который увеличиваетъ это отношеніе, — берется наименѣе слабымъ. Получаемая ошибка, которую стараются уменьшить только послѣ предѣла $x = a$, такимъ образомъ будетъ увеличиваться при приближеніи къ другому предѣлу, тогда какъ, обязанная уничтожиться даже при этомъ послѣднемъ предѣлѣ, когда полагаютъ $A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, она не можетъ сильно увеличиваться.

Операція, которая служитъ для замѣны такимъ образомъ, между двумя предѣлами $x = a$, $x = b$, функціи $f(x)$ другой, болѣе простой, какъ напр. $f(a) + A(x - a)$, для того, чтобы получить съ извѣстнымъ приближеніемъ промежуточныя значенія $f(x)$, называется *интерполяціей* (включеніемъ), если стараются, чтобы болѣе простая функція равнялась разсматриваемой $f(x)$ при двухъ предѣлахъ, и *экстраполяціей*, если бы она равнялась $f(x)$ при одномъ только предѣлѣ, но варіировала бы, какъ $f(x)$. Если болѣе простая функція первой степени — формы

$$f(a) + A(x - a)$$

и когда, слѣдовательно, дѣло идетъ о томъ, чтобы дугу, простирающуюся между абсциссами a и b кривой, которая выражается уравненіемъ $y = f(x)$, замѣнить прямой $y = f(a) + A(x - a)$, начинающейся съ конца $x = a$, то интерполяція заставляетъ принять, какъ это и было указано, $A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ или замѣнить дугу хордой, а экстраполяція — принять, сообразно съ формулой (8), $A = f'(a)$, или продолжать дугу въ направленіи, которое она получаетъ въ разсматриваемомъ концѣ $x = a$, замѣняя такимъ образомъ ее ея касательной. Въ обоихъ случаяхъ, въ виду предполагаемаго постоянства отношенія увеличеній $f(x) - f(a)$ функціи къ увеличеніямъ $x - a$ перемѣннаго, операція называется „операціей, производимой при помощи *пропорціональныхъ частей*"; но *коэффиціентъ пропорціональности* A не вполнѣ одинъ и тотъ же. Предшествующія

разсужденія показываютъ, что интерполяція, когда ошибка уничтожается при обоихъ предѣлахъ, болѣе *надежна*, чѣмъ экстраполяція, в что она точно такъ же гораздо легче, даже въ случаѣ, когда ничто не мѣшаетъ вычислить прямо функцію при двухъ предѣлахъ.

Методъ приближенія корней *черезъ двойное ложное предположеніе*, послѣ того, какъ получены два сосѣднихъ предѣла $x = a$, $x = b$, дающихъ обратные знаки первой части уравненія $f(x) = 0$, равнозначущъ предположенію, въ интервалѣ,

$$f(x) = f(a) + A(x - a) \quad \text{съ} \quad A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

и слѣдовательно интерполяціи, между тѣмъ какъ методъ приближенія Ньютона заставляетъ брать между тѣми же предѣлами

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

или прибѣгать къ экстраполяціи. Обыкновенно эти методы взаимно дополняютъ другъ друга и даютъ для $x - a$ въ то мгновеніе, когда $f(x) = 0$, два приближенныхъ значенія $-\frac{f(a)}{A}$, $-\frac{f(a)}{f'(a)}$, между которыми и находится истинное значеніе. Дѣйствительно, по принципу безпрерывности или, скорѣе, постепеннаго варіированія отношеніе $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ удаляется отъ своего начальнаго значенія $f'(a)$ по мѣрѣ удаленія x отъ a, и не перестаетъ такимъ образомъ варіировать въ одномъ и томъ же смыслѣ, когда достигаетъ своего значенія A, отнесеннаго къ другому предѣлу $x = b$, лишь бы только интервалъ $b - a$ былъ достаточно тѣсенъ; отсюда слѣдуетъ, что значеніе $\frac{-f(a)}{x - a}$ этого отношенія въ неизвѣстный промежуточный моментъ, когда $f(x) = 0$, заключается между двумя количествами $f'(a)$ и A, очень мало разнящимися другъ отъ друга, а слѣдовательно поправка, $x - a$, приходится между $-\frac{f(a)}{A}$ и $-\frac{f(a)}{f'(a)}$. Но если надо выбирать одинъ изъ двухъ этихъ способовъ, то слѣдуетъ брать прежній и естественный способъ *двойного ложнаго предположенія* или *разностей*, который предпочитается по предыдущимъ замѣчаніямъ.

37. — Примѣненіе къ логариѳмическимъ исчисленіямъ.

Извѣстно, что интерполяція посредствомъ пропорціональныхъ частей употребляется для вычисленія десятичныхъ логариѳмовъ, не содержащихся въ таблицѣ, напр. логариѳмовъ дробныхъ чиселъ, заключающихся между 1000 и 10000, когда въ таблицѣ даются въ этомъ интервалѣ съ пятью десятичными знаками только логариѳмы цѣлыхъ чиселъ.

Чтобы увѣриться въ вѣрности интерполяціи, разсмотримъ относительную ошибку, которая входитъ въ искомую поправку, т.-е. въ количество, которое надо прибавить къ данному логариѳму извѣстнаго числа n, чтобы имѣть логариѳмъ разсматриваемаго числа $n+h$, заключеннаго между n и $n+1$. Такъ какъ логариѳмы цѣлыхъ или дробныхъ чиселъ, ихъ относительныя разности и опредѣляемыя дроби этихъ разностей въ различныхъ системахъ логариѳмовъ суть количества прямо пропорціональныя *модулямъ*, то ясно, что *относительная* ошибка, получаемая при поправкѣ, будетъ одна и та же при всѣхъ системахъ; а это и позволяетъ поступать такъ, какъ будто бы дѣло шло о натуральныхъ логариѳмахъ, или о функціи $\lg x$, которая имѣетъ для производной $\frac{1}{x}$. По формулѣ стр. 31 отношеніе точной поправки $\lg(n+h)-\lg n$, увеличенія функціи, къ соотвѣтствующему увеличенію h перемѣннаго, будетъ равняться производной, взятой при промежуточномъ значеніи $n+\Theta h$ перемѣннаго; и если назовемъ черезъ δ эту точную поправку, то будемъ имѣть

$$\delta=\frac{h}{n+\Theta h}. \tag{9}$$

Но *табличная разность* есть значеніе, $\frac{1}{n+\Theta_1}$, которое эта точная поправка получаетъ въ частномъ случаѣ $h=1$, при которомъ я назову черезъ Θ_1 то, что обозначала Θ; правило же пропорціональныхъ частей, заключается въ томъ, что δ берется вообще равною своей дроби h, или полагается $\delta=\frac{h}{n+\Theta_1}$, значенію приближенному и меньшему точнаго значенія (9) на

$$\frac{h}{n+\Theta h}-\frac{h}{n+\Theta_1}=\frac{h}{n+\Theta h}\,\frac{\Theta_1-\Theta h}{n+\Theta_1}. \tag{10}$$

Относительная ошибка вслѣдствіе неточнаго примѣненія употребленнаго правила равна слѣдовательно $\frac{\Theta_1-\Theta h}{n+\Theta_1}$, дроби, которая не достигаетъ $\frac{1}{n}$, такъ какъ ея числитель по абсолютной величинѣ ниже единицы, а знаменатель больше n. Такимъ образомъ, когда въ таблицѣ употребляютъ это при логариѳмахъ цѣлыхъ чиселъ, заключенныхъ между 1000 и 10000, то интерполяція посредствомъ пропорціональныхъ частей не измѣняетъ даже и тысячной части производимой поправки; а такъ какъ наибольшая табличная разность между этими предѣлами есть превышеніе, 0,00043, логариѳма 1001 надъ логариѳмомъ 1000, то ошибка никогда не достигнетъ 0,00000043, количества, совершенно незамѣтнаго, такъ какъ оно не составляетъ даже десятой части наибольшей ошибки, могущей повысить на 0,5 пятую десятичную цифру, что про-

исходить иногда отъ уничтоженія десятичныхъ знаковъ шестого и высшаго порядковъ.

Когда n превышаетъ нѣсколько единицъ, то Θ и Θ_1 замѣтно равняются $\frac{1}{2}$, согласно формулѣ, которую мы разсмотримъ [№ 94, формула (13)]. Но это можно видѣть и изъ того, что на равномъ разстояніи отъ того и другого конца значенія $x = n + \frac{1}{2}h$, средняго между двумя разсматриваемыми (относительно мало разнящимися) n и $n + h$, *отклоненія*, $f'(x)$, функціи $f(x)$, такъ же постепенно-измѣняющейся, какъ и $\lg x$, получаютъ два значенія, изъ которыхъ одно превосходитъ $f'(n + \frac{1}{2}h)$ на столько, на сколько второе меньше его; отсюда слѣдуетъ, что безконечно-малымъ и равнымъ увеличеніямъ dx, берущимся, начиная съ двухъ значеній x, такимъ образомъ равноотстоящихъ отъ $n + \frac{1}{2}h$, соотвѣтствуютъ два увеличенія $f'(x)dx$ функціи, почти имѣющихъ ту же сумму, какую бы они имѣли, если бы каждый изъ нихъ равнялся $f'(n + \frac{1}{2}h)dx$. Слѣдовательно, если даже приблизительно сосчитать варіацію отклоненія $f'(x)$ между двумя предѣлами $x = n$ и $x = n + h$, то все увеличеніе $f(n + h) - f(n)$ функціи отъ одного изъ этихъ предѣловъ до другого будетъ произведеніемъ постояннаго множителя $f'(n + \frac{1}{2}h)$ на сумму h послѣдовательныхъ увеличеній dx перемѣннаго; а изъ этого слѣдуетъ, что можно взять $n + \frac{1}{2}h$ для промежуточнаго значенія, ранѣе названнаго нами черезъ $n + \Theta h$, или написать $\Theta = \frac{1}{2}$.

Поэтому, если мы замѣнимъ Θ и Θ_1 черезъ $\frac{1}{2}$ и кромѣ того въ знаменателѣ пренебрежемъ Θh рядомъ съ n, то абсолютная ошибка вслѣдствіе неправильности (10), сравниваемая съ табличной разностью $\frac{1}{n + \Theta_1}$, будетъ дробью $\frac{h(1-h)}{2n}$, или равняться будетъ $\frac{1}{8n}$, такъ какъ выраженіе $h(1-h)$ или $\frac{1}{4} - (h - \frac{1}{2})^2$ очевидно никогда не превысить члена $\frac{1}{4}$, въ которой оно обращается при $h = \frac{1}{2}$. Наибольшая ошибка, которую допускаетъ разсматриваемое правило интерполяціи, слѣдовательно, будетъ лишь $8n$'ой почти частью табличной разности. Это правило, слѣдовательно, смѣло можно употреблять, не боясь измѣнить пяти десятичныхъ знаковъ въ логариѳмахъ только цѣлыхъ чиселъ между 100 и 1000, такъ какъ разность между двумя десятичными логариѳмами 100 и 101 есть 0,00432, $8n$'ая часть которой, т.-е. здѣсь 800-я, немногимъ превосходитъ половину пятаго десятичнаго знака. Такимъ образомъ довольно рѣдко приходится исправлять на единицу послѣднюю десятичную цифру поправки, или, скорѣе, логариѳма, которая уже въ таблицѣ для числа n можетъ быть приближена только почти на полъединицы вслѣдствіе погрѣшности.

Однако видно, что интерполяція перестаетъ быть точной въ логариѳмическихъ исчисленіяхъ съ пятью десятичными знаками, когда *табличная разность* достигаетъ значенія 0,00432 или, что одно и то же, когда интерполяція представляетъ относительную разность, доходящую

до $\frac{1}{100}$ между двумя послѣдующими числами (цѣлыми или дробными) таблицы, которой хотятъ воспользоваться; дѣйствительно тогда, если замѣнить два послѣдовательныхъ числа, находящіяся въ таблицѣ, и промежуточное число, логариѳмъ котораго требуется, другими пропорціональными, т.-е. имѣющими между своими логариѳмами тѣ же самыя разности, но вычисленными такимъ образомъ, чтобы разность двухъ данныхъ чиселъ таблицы равнялась единицѣ, то наименьшее изъ нихъ (чиселъ) не превзойдетъ 100, и ошибка, допускаемая правиломъ, можетъ быть болѣе $\frac{1}{2}$ пятаго десятичнаго знака. Всякая употребляемая табличная разность, слѣдовательно, должна стремиться не превышать почти 400 единицъ этого порядка, если только не будетъ употребленъ болѣе сложный способъ интерполяціи, состоящій напр. въ сложеніи обыкновенной поправки съ дробью $\frac{h(1-h)}{2n}$ табличной разности, такъ что послѣдняя останется меньше извѣстнаго предѣла (выше котораго этотъ самый пріемъ уже не былъ бы достаточенъ).

Отмѣченный случай встрѣчается при синусахъ и тангенсахъ какой-либо дуги, находящейся почти въ самомъ началѣ тригонометрическихъ таблицъ; избѣгаютъ здѣсь пользоваться рекомендуемымъ правиломъ интерполяціи. Такъ какъ эти синусы и тангенсы находятся замѣтно въ прямомъ отношеніи съ своими дугами, то здѣсь можно прилагать только принципъ малыхъ увеличеній, пропорціональныхъ не логариѳмамъ, а только числамъ, т.-е. функціямъ, синусу и тангенсу, сравниваемымъ съ дугой.

38. — Дифференцированіе какихъ-либо явныхъ функцій.

Явныя функціи конечной формы, соединенныя знаками алгебры и тригонометріи, будучи ничѣмъ инымъ, какъ комбинаціями простыхъ функцій, разсмотрѣнныхъ во второй главѣ, приводятся къ фунціямъ функцій или къ сложнымъ функціямъ этихъ комбинацій. Поэтому предыдущія правила позволяютъ дифференцировать и ихъ всѣ. Нѣкоторыя изъ этихъ правилъ нѣтъ необходимости даже доказывать; дѣйствительно, они простыя примѣненія другихъ.

Таково напр. правило, касающееся произведенія uvw нѣсколькихъ множителей. Заставляя варіировать послѣдовательно только u, или v, или w, будемъ имѣть три частныя производныя vw, wu, uv; формула же (6) даетъ для полной производной произведенія $vwu'+wuv'+uvw'$, сообразно съ соотношеніемъ (1) стр. 33. Точно такъ же двѣ частныя производныя частнаго $\frac{u}{v}$, или uv^{-1}, по отношенію къ u и v, будутъ $\frac{1}{v}$, $\frac{-u}{v^2}$, изъ чего получается производная по x, $\frac{u'}{v}-\frac{uv'}{v^2}=\frac{vu'-uv'}{v^2}$, получаемая также и по формулѣ (2) страницы 33.

Кромѣ того правило для дифференцированія функціи $y = f(x)$, обратной другой данной $x = \varphi(y)$, непосредственно вытекаетъ изъ правилъ дифференцированія функцій функціи; дѣйствительно $\varphi(y)$, выраженіе x'а, не что иное, какъ функція функціи $\varphi[f(x)]$, и, слѣдовательно, ея производная $\frac{dx}{dx}$ или 1 будетъ произведеніемъ производныхъ $\varphi'(y)$, $f'(x)$ двухъ фигурирующихъ здѣсь функцій. Такимъ образомъ эти двѣ производныя прямой функціи $\varphi(y)$ и обратной $f(x)$ равняются обратно одна другой, сообразно съ правиломъ стр. 39, которое нѣсколько разъ было примѣняемо.

Какъ примѣръ сложной функціи, производная которой не была еще получена, возьмемъ *экспонентную* функцію, *имѣющую въ основаніи перемѣнное*, $y = u^v$. Ея производная по отношенію къ u есть производная степени формы u^m и дѣлается, слѣдовательно, vu^{v-1}, тогда какъ ея производная по отношенію къ v есть производная экспонентной функціи формы a^v и дѣлается $u^v \lg u$. Поэтому имѣемъ $y' = vu^{v-1} u' + (u^v \lg u) v'$. Если, напр. $u = x$, и $v = x$, или $y = x^x$, то получимъ просто

$$y' = x^x(1 + \lg x)$$

такъ какъ u' и v' обращаются въ единицу.

39. — Дифференцированіе неявныхъ функцій.

Точно такъ же производныя *неявныхъ* функцій, выраженныхъ нерѣшенными уравненіями, получаются, и въ замѣчательной формѣ, съ помощью предыдущихъ правилъ, лишь бы только части этихъ уравненій были бы извѣстными явными функціами входящихъ въ эти же уравненія перемѣнныхъ

Начнемъ съ случая одного только уравненія, даннаго въ формѣ $F(x, y) = 0$ или даже въ болѣе общей $F(x, y) =$ какому-либо постоянному c и выражающаго независимое перемѣнное x и функцію y этого самаго перемѣннаго. Первая часть $F(x, y)$, въ которой y разсматривается сначала, какъ какая-либо функція x'а, есть, очевидно, извѣстная сложная функція, имѣющая для полной производной $F'_x(x, y) + F'_y(x, y)y'$. Но если постепенно опредѣлять y подъ тѣмъ даннымъ условіемъ, что, при варіирующемъ x, $F(x, y)$ не перестанетъ равняться постоянному c, то эта полная производная будетъ постоянно уменьшаться и сдѣлается

$$F'_x + F'_y y' = 0.$$

Иначе говоря, отношеніе элементарныхъ измѣненій dx и dy, которыя испытываютъ въ каждое мгновеніе перемѣнныя x и y, *будетъ опредѣляться* въ виду уравненія $F(x, y) = c$ тѣмъ, что два соотвѣтственныя и безконечно-малыя частныя увеличенія, $F'_x dx$ и $F'_y dy$ или $F'_y y dx$, функціи $F(x, y)$ могутъ быть замѣнены другъ другомъ. Слѣдо-

вательно, получаются для y' уравненіе первой степени, называемое *уравненіемъ Слюза (Sluze)*

$$(11)\quad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\,y'=0;\quad \text{отсюда}\quad y'=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)};$$

производная неявной функціи y выразится такимъ образомъ посредствомъ *дѣйствительныхъ* значеній x, y перемѣнныхъ; а это избавляетъ отъ болѣе или менѣе труднаго изслѣдованія для нахожденія, чѣмъ сдѣлаются x и y въ сосѣдствѣ съ ними.

Такъ какъ разсматриваемое уравненіе $F(x, y)=c$ не первой степени по y (если бы этого не было, то непосредственное рѣшеніе его, измѣнило бы y въ явную функцію x'а), то одна по крайней мѣрѣ изъ двухъ частныхъ производныхъ F, именно $F'_y(x, y)$ будутъ содержать y въ своемъ выраженіи. Итакъ найденная производная y', частное отъ дѣленія $-F'_x$ на F'_y, будетъ отличаться отъ производной, которую мы получили бы, если бы функція y была явной, тѣмъ, что ея значеніе будетъ выражаться не только въ видѣ функціи x'а, но также и въ особенности въ видѣ функція y'а: обстоятельство, которое въ концѣ концовъ заставляетъ, если хотятъ вычислить y', рѣшить уравненіе $F(x, y)=c$ при *настоящемъ* значеніи x'а, но изъ котораго еще вытекаетъ, вслѣдствіе того же самаго пріема, въ случаѣ, если получается нѣсколько корней y или нѣсколько рукавовъ (направленій) кривой $F(x, y)=c$, — важное преимущество получать для всѣхъ ихъ одну производную одной и той же формы, перемѣняя корни только въ зависимости отъ различныхъ значеній y. Если, напр., уравненіе $F(x, y)=c$ имѣетъ за первую часть раціональную и цѣлую функцію x'а и y'а, какъ это и получается послѣ уничтоженія знаменателей и исключенія радикаловъ при разсматриваніи алгебраическихъ кривыхъ, то частныя производныя F'_x, F'_y будутъ также двумя полиномами; *угловой коэффиціентъ* y' касательной будетъ выражаться раціональной функціей x'а и y'а, гораздо болѣе простой, чѣмъ выраженіе, которое составляется изъ радикаловъ и къ которому привело бы дифференцированіе неявнаго значенія y'а въ случаяхъ, все же менѣе трудныхъ, если бы уравненіе $F(x, y)=c$ было рѣшено алгебраически.

Пусть, какъ примѣръ, дано уравненіе эллипса

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0.$$

Здѣсь $c=0$ и $F(x, y)=a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2$; отсюда

$$F'_x=2b^2x,\quad F'_y=2a^2y.$$

Слѣдовательно получается для углового коэффиціента касательной

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}\quad \text{вмѣсто}\quad y'=\mp\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

что было бы, если бы взять два явныхъ значенія, $\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, y'а.

Функція y, обратная другой $x=\varphi(y)$ можетъ быть представлена еще какъ замѣчательный примѣръ неявной функціи. Она, дѣйствительно, опредѣляется нерѣшеннымъ уравненіемъ $x-\varphi(y)=0$; это даетъ $F(x, y)=x-\varphi(y)$, $F'_x=1$, $F'_y=-\varphi'(y)$: отсюда, по (11), $y'=\frac{1}{\varphi'(y)}$, согласно и правилу, почти очевидному и приводимому нами нѣсколько разъ, для дифференцированія такихъ видовъ функцій. Онѣ, какъ мы видѣли представляютъ ту особенность, что ихъ производная не зависитъ прямо отъ независимаго перемѣннаго x, но только отъ функціи.

Перейдемъ теперь къ случаю нѣсколькихъ неявныхъ функцій y, z, u, т.-е. пусть будетъ дано между x и y, z, u для опредѣленія этихъ функцій одинаковое число нерѣшенныхъ уравненій формы $f(x, y, z, u)=0$, $\varphi(x, y, z, u)=0$, $\psi(x, y, z, u)=0$, или, въ болѣе общей формѣ,

$$f(x, y, z, u)=c, \quad \varphi(x, y, z, u)=c', \quad \psi(x, y, z, u)=c'',$$

гдѣ c, c', c'' обозначаютъ какія-либо постоянныя. Такъ какъ перемѣнныя y, z, u варіируетъ съ x такъ, что сложныя функціи f, φ, ψ сохраняютъ свои первоначальныя значенія, то здѣсь можно будетъ опять уничтожить полныя производныя первыхъ частей f, φ, ψ, т.-е. взять между y', z', u' уравненія первой степени съ коэффиціентами — функціями x'а, y',а z'а, u'а:

$$(12)\qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z'+\frac{\partial f}{\partial u}u'=0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial \varphi}{\partial z}z'+\frac{\partial \varphi}{\partial u}u'=0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}y'+\frac{\partial \psi}{\partial z}z'+\frac{\partial \psi}{\partial u}u'=0. \end{cases}$$

Итакъ, *когда нѣсколько функцій одного перемѣннаго опредѣлены равнымъ числомъ нерѣшенныхъ уравненій, то производныя этихъ функцій получаются, какъ бы ни были сложны данныя соотношенія, если рѣшить простую систему уравненій первой степени, къ которой приводитъ дифференцированіе этихъ соотношеній.* Изъ этого слѣдуетъ, что, если разсматриваемыя уравненія — алгебраическія и освобождены отъ своихъ радикаловъ, то выраженія искомыхъ производныхъ y', z', u' содержатъ раціонально независимое перемѣнное x и самыя неявныя функціи y, z, u; вслѣдствіе чего эти *единичныя* выраженія даютъ столько различныхъ системъ значеній, сколько ихъ есть при неявныхъ функціяхъ, т.-е. сколько корней y, z, u, доставляемыхъ данными уравненіями послѣ подстановки дѣйствительнаго значенія вмѣсто x. Вслѣдствіе этого нельзя избавиться отъ опредѣленія въ концѣ концовъ этихъ системъ значеній y'а, z'а, u'а; но *числовое рѣшеніе уравненій будетъ удовлетворено, вмѣсто общаго рѣшенія или безконечности числовыхъ рѣшеній, когда будетъ узнанъ прямо способъ варіированія функцій y, z, u въ сосѣдствѣ съ ихъ дѣйствительными значеніями.*

41. — Касательная плоскости къ поверхности.

Когда поверхность представляется извѣстнымъ уравненіемъ формы $z=f(x, y)$ между своей ординатой z и координатами x и y, — то z дѣлается сложной функціей, зависящей въ концѣ концовъ только отъ одного перемѣннаго t при всѣхъ линіяхъ, MM' напр., проведенныхъ на этой поверхности. Если проведемъ параллели, какъ Mm, $M'm'$, ..., къ оси z'овъ, то ихъ основанія m, m', ... на плоскости xy образуютъ извѣстную линію, гдѣ x и y, координаты какой-либо точки m, будутъ, напр. функціями вспомогательнаго перемѣннаго t, такъ какъ эта линія получается съ помощью мобиля (стр. 20); соотвѣтствующая же ордината $mM=z=f(x, y)$ тоже сдѣлается функціей t'а при помощи промежуточной функціи x'а и y'а.

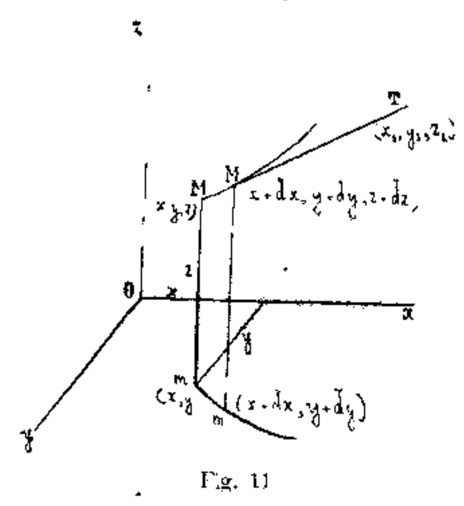


Fig. 11

Пусть для краткости $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$, или назовемъ черезъ p и q двѣ соотвѣтственныя частныя производныя $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, которыя кромѣ того мы предположимъ безпрерывными и вполнѣ опредѣленными во всякомъ сосѣдствѣ съ разсматриваемой точкой $m(x, y)$ вплоть до очень малыхъ разстояній. Производная z' очевидно будетъ $px'+qy'$: въ другихъ словахъ будемъ имѣть

$$dz=pdx+qdy. \tag{16}$$

Предположивъ это, мы увидимъ, что на поверхности отъ самой точки M и во всевозможныя стороны можно провести безконечность кривыхъ, какъ MM', которымъ будетъ соотвѣтствовать на плоскости xy столько же линій mm', образующихся вокругъ m. Какая-либо точка $M'(x+dy, y+dy, z+dz)$ поверхности, безконечно сосѣдняя къ M, можетъ такимъ образомъ быть соединена съ ней элементарной дугой MM', касательная къ которой въ M будетъ продолженіемъ, $M'T$, ея хорды MM', въ прадѣльномъ положеніи, которое мы и имѣли въ виду, употребляя обозначенія dx и dy. Если мы назовемъ черезъ x_1, y_1, z_1 координаты движущейся точки T, образующей эту касательную, то три разности x_1-x, y_1-y, z_1-z будутъ варіировать, по отличительному характеру прямыхъ въ пространствѣ, пропорціонально MT, сохраняя между собой

постоянно тѣ же самыя отношенія, что въ то мгновеніе, когда T находилось въ M' и когда $x_1 - y$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ равнялись dx, dy, dz. Дифференціалы dx, dy, dz могутъ быть замѣнены въ уравненіи (16), которое содержитъ только ихъ взаимныя отношенія, черезъ $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$; тогда между *подвижными координатами* x_1, y_1, z_1 всѣхъ продолженныхъ безконечно малыхъ хордъ, или *касательныхъ*, образующихся въ M на поверхности, — получается соотношеніе 1-ой степени

$$(17) \qquad z_1 - z = p(x_1 - x) + q(y_1 - y).$$

Но въ этомъ отношеніи, гдѣ $z_1 - z$ варіируетъ пропорціонально $x_1 - x$ такъ, что $y_1 - y$ не измѣняется, и пропорціонально $y_1 - y$ (съ др. коэффиціентомъ пропорціональности), лишь только $x_1 - x$ остается постоянной, — можно узнать уравненіе плоскости. Оно позволяетъ намъ слѣдовательно сказать, что *касательная къ поверхности, вращающаяся на ней вокругъ своей точки контакта, чертитъ плоскость*, или еще, *что въ безконечно маломъ пространствѣ, окружающемъ разсматриваемую точку контакта, поверхность походитъ на эту плоскость въ такой мѣрѣ, въ какой кривая — на свою касательную*. Дѣйствительно, всякая линія, какъ MM', лежащая на поверхности, можетъ, начиная съ M, отклониться отъ разсматриввомой плоскости только до своей касательной MT, разстояніе которой до какой-либо, M', изъ сосѣднихъ точекъ кривой равно просто произведенію соотвѣтствующей хорды MM' на sinus безконечно малаго угла TMM' этой хорды съ ея предѣльнымъ направленіемъ MT. А вслѣдствіе того, что всякая неподвижная прямая, выходящая изъ M, но отличающаяся отъ MT, образуетъ съ хордами вродѣ MM' и съ MT конечные или замѣтные углы, — то и всякая плоскость, проходящая черезъ M, но иная, чѣмъ мѣсто касательныхъ MT, будетъ занимать свое мѣсто подъ конечнымъ угломъ и будетъ отодвигаться безконечно дальше, чѣмъ это мѣсто, отъ поверхности въ сосѣдствѣ съ M.

По этимъ причинамъ плоскость, представляемая уравненіемъ (17), называется *касательной* въ $M(x, y, z)$ къ поверхности. Можно видѣть, что существуетъ одна лишь плоскость, которая проходитъ черезъ точку контакта M и къ которой всякая точка поверхности будетъ несравненно ближе, чѣмъ къ самой точкѣ контакта, въ очень маломъ районѣ вокругъ этой послѣдней; вслѣдствіе этого и касательная къ кривой есть единственная прямая, которая проходитъ черезъ ея точку контакта, и къ которой сосѣднія точки кривой будутъ безконечно ближе, чѣмъ къ этой точкѣ контакта.

ГЛАВА V

Производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ; *кривизна плоскостныхъ кривыхъ и дифференціальный параметръ второго порядка функціи точки.

47. — Производныя высшаго порядка: примѣры.

Такъ какъ производная функціи $y = f(x)$ независимаго перемѣннаго x есть новая функція $\frac{dy}{dx}$ или $f'(x)$, то эта послѣдняя во всѣхъ примѣненіяхъ анализа постепенно измѣняется, какъ и y (за исключеніемъ иногда случаевъ изолированныхъ значеній x'а), почему и можетъ быть разсматриваема, какъ обладающая въ свою очередь производной: эта производная *первой* производной называется *второй производной* функціи $f(x)$ или y. Въ способѣ обозначенія Ньютона или Лагранжа это представляютъ двумя черточками вверху, которыя ставятся за буквой, обозначающей функцію, т.-е. пишутъ напр. y'' или $f''(x)$. Собственная производная этой второй производной получаетъ названіе *третьей производной* и выражается при помощи трехъ черточекъ, y''' или $f'''(x)$ и такъ далѣе.

Возьмемъ, какъ первый примѣръ, многочленъ какой-либо цѣлой степени m,

$$y = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots$$

Дифференцируя его первую производную

$$y' = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} + \ldots,$$

которая есть новый полиномъ, но $m-1$ степени, мы получаемъ

$$y'' = m(m-1)A_0x^{m-2} + (m-1)(m-2)A_1x^{m-3} + \ldots,$$

то же самое и для слѣдующихъ производныхъ. Степень результата уменьшается на единицу при каждомъ дифференцированіи; вслѣдствіе этого m'ая производная, $y^{(m)} = (1.2.3.4 \ldots m) A_0$ будетъ лишь нулевой степени. Такимъ образомъ *когда функція — раціональная и цѣлая, то ея производная порядка, равнаго степени функціи, обращается въ постоянное, а производныя болѣе высшихъ порядковъ дѣлаются нулями.*

Какъ второй примѣръ, пусть даны будутъ три функціи

$$y = e^x,\quad y = \cosh x \text{ или } \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\quad y = \sinh x \text{ или } \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Извѣстно, что, если дѣло идетъ о первой, то производная ея равна ей самой: отсюда легко выводится то, что, если берутся вторая и третья, то каждая изъ нихъ будетъ производной для другой. Слѣдовательно, *экспонентное количество e^x снова появляется при всякомъ дифференцированіи, а гиперболическія функціи* $\cosh x$, $\sinh x$ *при всякой парѣ дифференцированій.* При экспонентной функціи $y = e^x$ это выражается уравненіемъ $y' = y$, а при функціяхъ $y = \cosh x$, $y = \sinh x$ уравненіемъ $y'' = y$.

Наконецъ возьмемъ, какъ послѣдній примѣръ, двѣ круговыхъ функціи $y = \cos x$, $y = \sin x$. Здѣсь каждая изъ нихъ имѣетъ другую для своей производной, съ перемѣной знака, когда дифференцируютъ косинусъ; это значитъ, что при нихъ измѣненіе знака, но только одинъ разъ при двухъ послѣдовательныхъ дифференцированіяхъ, происходитъ постоянно. Слѣдовательно, каждая изъ двухъ круговыхъ функцій $y = \cos x$, $y = \sin x$ *появляется снова только въ абсолютной величинѣ посредствомъ двухъ дифференцированій*; и здѣсь существуетъ уже не уравненіе $y'' = y$, какъ при гиперболическихъ cosinus'ахъ и sinus'ахъ, а уравненіе $y'' = -y$ или $y'' + y = 0$. Принимая во вниманіе знаки, надо будетъ, слѣдовательно, сдѣлать четыре послѣдовательныя дифференцированія, чтобы прійти снова къ первоначальной функціи.

48. — Обозначеніе этихъ производныхъ дифференціальными частными; символическія обозначенія и дѣйствія.

Обозначеніе Лейбница прилагается также къ производнымъ высшаго порядка, такъ какъ это всегда первыя производныя другихъ производныхъ и такъ какъ всякая первая производная есть отношеніе двухъ безконечно-малыхъ одновременныхъ увеличеній функціи, которую дифференцируютъ, и ея перемѣннаго. При исчисленіи второй производной $y'' = f''(x)$ дифференцируется уже не сама функція y, а лишь ея производная $\dfrac{dy}{dx}$, дифференціалъ которой, соотвѣтствующій увеличенію dx перемѣннаго, естественно пишется черезъ $d\dfrac{dy}{dx}$: эта вторая производная, слѣдовательно, будетъ обозначаться черезъ $\dfrac{d\dfrac{dy}{dx}}{dx}$. Третья производная, частное дифференціала этой новой функціи на dx, будетъ имѣть для своего обозначенія $\dfrac{d\dfrac{d\dfrac{dy}{dx}}{dx}}{dx}$ и такъ далѣе. Для краткости согласились дифферен-

цирующуюся функцію, когда она уже производная, и, слѣдовательно, дробь, — ставить не числителемъ на оставшееся свободнымъ мѣсто въ $\frac{d}{dx}$, но позади этой фиктивной дроби $\frac{d}{dx}$ и въ той же строкѣ. Первая производная можетъ, такимъ образомъ, быть написана черезъ $\frac{d}{dx}y$, если не проще черезъ $\frac{dy}{dx}$; но вторая производная, дѣйствительно, обозначится черезъ $\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}$; третья производная черезъ $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}$ и такъ далѣе.

Знакъ $\frac{d}{dx}$ *дѣлается, такимъ образомъ, простымъ указаніемъ дифференцированія, производимаго по отношенію къ x надъ написанной послѣ этого знака функціей.* Всякое аналогичное выраженіе, которое въ формулахъ походитъ на обыкновенное *алгебраическое выраженіе* и можетъ представить количества, но, въ дѣйствительности, показываетъ только извѣстное дѣйствіе или извѣстную совокупность дѣйствій, долженствующихъ быть произведенными надъ указанными (или могущими быть) позади количествами, — всякое такое выраженіе называютъ *символическимъ*. Эти роды выраженій очень удобны, когда параллельно тому, что мы видѣли при разсмотрѣніи *символа* $\frac{d}{dx}$, безконечно-малыя или другія указываемыя ими дѣйствія слѣдуютъ одни за другими и связываются, какъ алгебраическія дѣйствія, которыя пришлось бы произвесть, если бы эти выраженія представляли настоящія количества; дѣйствительно, тогда достаточно будетъ приложить, почти механически, къ нимъ обыкновенныя правила алгебраическаго исчисленія, чтобы можно было въ концѣ дѣйствій результаты, данные этимъ исчисленіемъ, въ нѣкоторомъ родѣ *перенести* въ анализъ безконечно-малыхъ, гдѣ ихъ смыслъ дѣлается совсѣмъ другимъ. Уже въ алгебрѣ и въ теоріи круговыхъ функцій (№ 19) знакъ $\sqrt{}1$ былъ истиннымъ символическимъ выраженіемъ, способнымъ замѣнить извѣстные способы комбинированія въ механизмѣ дѣйствій надъ количествами, и мы видѣли, насколько полезно было употребленіе этого символа.

Но вышеобъясненнымъ обозначеніемъ производныхъ высшаго порядка самъ Лейбницъ не былъ удовлетворенъ: онъ еще болѣе упростилъ его. Объ этомъ-то будетъ далѣе рѣчь.

49. — Разности и дифференціалы высшаго порядка.

Будемъ послѣдовательно придавать перемѣнному x функціи $y = f(x)$ малое увеличеніе или малую разность Δx, сколь угодно слабую, но постоянно равную, т.-е. одинаковую при всякомъ *настоящемъ* значеніи x'а, къ которому ее прибавляютъ, или при всякой функціи x'а, при ко-

торой она употребляется въ данномъ вопросѣ. Соотвѣтствующая разность, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, функціи $f(x)$ будетъ, какъ извѣстно, выраженіемъ $[f'(x) + \varepsilon]\Delta x$, гдѣ ε обозначаетъ функцію x'а и Δx'а, очень малую при всѣхъ значеніяхъ x и даже безслѣдно уничтожающуюся, если постоянное Δx равняется нулю. Такимъ образомъ Δy есть новая функція x'а, относительно которой, несмотря на ея незамѣтную малость, можно разсуждать такъ же, какъ мы это дѣлали относительно $f(x)$. Если же взять разность $\Delta(\Delta y)$, получающуюся отъ увеличенія въ его выраженіи, x'а на Δx, и если разсматривать такимъ образомъ превышеніе $f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)$ надъ $f(x + \Delta x) - f(x)$, то это будетъ тѣмъ, что называютъ *второй разностью* данной функціи y. Эта разность *первой* разности, очевидно, будетъ писаться черезъ $\Delta\Delta y$, или, для сокращенія, $\Delta^2 y$, представляя *символической степенью* Δ^2 повтореніе $\Delta\Delta$. Но функція Δy, будучи произведеніемъ постояннаго множителя на перемѣнное количество $f'(x) + \varepsilon$, очевидно, увеличивается между однимъ значеніемъ x'а и слѣдующимъ на произведеніе соотвѣтствующаго увеличенія, $\Delta f'(x) + \Delta\varepsilon$, этого перемѣннаго количества на постоянный множитель Δx, поэтому имѣемъ

(1) $$\Delta^2 y = [\Delta f'(x) + \Delta\varepsilon]\,\Delta x$$

Но *малыя* увеличенія $\Delta f'(x)$, $\Delta\varepsilon$ выраженій $f'(x)$ и ε выражаются посредствомъ производныхъ $f''(x)$, $\frac{d\varepsilon}{dx}$ этихъ функцій, какъ выражали мы $\Delta f(x)$ посредствомъ $f'(x)$; вслѣдствіе этого, называя черезъ ε_1 и ε' двѣ новыя, такія же функціи, какъ и ε, т.-е. уничтожающіяся, когда постоянное Δx обращается въ нуль, мы можемъ написать

$$\Delta f'(x) = [f''(x) + \varepsilon_1]\Delta x, \quad \Delta\varepsilon = \left(\frac{d\varepsilon}{dx} + \varepsilon'\right)\Delta x,$$

или, черезъ подстановку ихъ въ (1),

(2) $$\Delta^2 y = \left[f''(x) + \varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon}{dx} + \varepsilon'\right](\Delta x)^2$$

Но въ выраженіи, заключенномъ въ квадратныя скобки, членъ $\frac{d\varepsilon}{dx}$ есть той же самой природы, что предыдущій ε_1 или слѣдующій ε', и даетъ вмѣстѣ съ ними общую сумму, стремящуюся въ одно время съ Δx къ нулю. Дѣйствительно, съ одной стороны, функція x'а и Δx'а, называемая черезъ ε, уничтожается *при всѣхъ значеніяхъ* x'а, когда дѣлаютъ $\Delta x = 0$, а слѣдовательно ея производная $\frac{d\varepsilon}{dx}$ тогда и подавно нуль; съ другой же стороны, эта производная $\frac{d\varepsilon}{dx}$, въ виду принципа

постепеннаго варіированія, что мы допускаемъ здѣсь во всѣхъ данныхъ функціяхъ, — не можетъ получить нулевое значеніе, относящееся къ случаю, когда Δx уничтожается, не приближаясь неопредѣленно къ нему по мѣрѣ того, какъ Δx все болѣе и болѣе дѣлается сосѣднимъ съ нулемъ. Сумма $\varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon}{dx} + \varepsilon'$, слѣдовательно, есть новая уничтожающаяся функція x'а и Δx'а. Если ее представить черезъ ε_2, то выраженіе $\Delta^2 y$ сдѣлается

$$\Delta^2 y = [(f''(x) + \varepsilon_2] \Delta x)^2 \tag{3}$$

Это есть новая функція x'а. Возьмемъ разность, которая называется *третьей разностью* функціи y и которая будетъ изображаться черезъ $\Delta(\Delta^2 y)$ или, просто, $\Delta^3 y$: такъ какъ $\Delta^2 y$ равняется

$$f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x),$$

то эта новая разность будетъ превышеніемъ

$f(x+3\Delta x) - 2(x+2\Delta x)+f(x+\Delta x)$ надъ $f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)$.

Ея значеніе, произведеніе постояннаго множителя $(\Delta x)^2$ на увеличеніе, которое получитъ перемѣнный множитель $f''(x) + \varepsilon_2$, когда x увеличится на Δx, очевидно, будетъ равняться $[\Delta f''(x) + \Delta\varepsilon_2] \Delta x)^2$ и разсужденіе, которое имѣло мѣсто при выводѣ формулъ (1) и (2), позволитъ написать, если назвать черезъ ε_3 новую уничтожающуюся съ Δx функцію,

$$\Delta^3 y = [f'''(x) + \varepsilon_3](\Delta x)^3.$$

Это продолжится до n'ной *разности*,

$$\Delta^n y = [f^{(n)}(x) + \varepsilon_n] \Delta x)^n, \tag{4}$$

значеніе которой, дѣленное на $(\Delta x)^n$, даетъ

$$f^{(n)}(x) + \varepsilon_n = \frac{\Delta^n y}{(\Delta x)^n}. \tag{5}$$

Если же теперь предположить, что въ этомъ послѣднемъ выраженіи увеличеніе Δx будетъ браться все болѣе и болѣе малымъ, то ε_n будетъ стремиться къ нулю, поэтому можно сказать:

n'ая производная функціи есть предѣлъ, къ которому стремится отношеніе n'ой разности этой функціи къ n'ой степени разности перемѣннаго, когда эта послѣдняя разность, предполагаемая одинаковой во время образованія всѣхъ послѣдовательныхъ разностей функціи или при всѣхъ разсматриваемыхъ послѣдовательныхъ значеніяхъ перемѣннаго, неопредѣленно приближается къ нулю.

Лейбницъ выразилъ, какъ и при первыхъ разностяхъ Δx и Δy, желаніе разсматривать только предѣльные результаты, замѣняя знакъ Δ знакомъ d и названіе *„разность порядка n“* ея уменьшительнымъ *„дифференціалъ порядка n“*. Подобное желаніе, очевидно, уничтожаетъ въ формулѣ (5) вліяніе члена ε_n, долженствующаго уничтожиться въ предѣлѣ. вслѣдствіе этого подстановка d на мѣсто Δ приводитъ эту формулу (5) къ

$$(6) \qquad f^{(n)}(x) \quad \text{или} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Итакъ *n'ая производная функціи есть частное n'наго дифференціала этой функціи на n'ную степень дифференціала перемѣннаго, лишь бы только его значенія были равноотстоящи другъ отъ друга или его дифференціалъ оставался бы однимъ и тѣмъ же при исчисленіи дифференціаловъ разныхъ порядковъ функціи вплоть до наивысшаго изъ разсматриваемыхъ.*

Такимъ образомъ какая угодно производная можетъ быть выражаема *непосредственно* черезъ соотвѣтствующій дифференціалъ, не прибѣгая къ производнымъ меньшихъ порядковъ; и y'', y''',... суть простыя отношенія $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$,...: способъ обозначенія, предпочтительный передъ обозначеніемъ предыдущаго нумера, но предполагающій всѣ послѣдовательныя увеличенія dx равными, а не произвольно измѣняющимися отъ одной производной до другой.

50. — Употребленіе разностей высшаго порядка въ числовыхъ исчисленіяхъ: случай цѣлой функціи.

Въ исчисленіяхъ приближенія, гдѣ заставляютъ независимое перемѣнное x увеличиваться малыми и *равными* увеличеніями Δx, эти послѣднія очень часто такъ слабы, что выраженіе ε_n въ (4) рядомъ съ $f^{(n)}(x)$ составляетъ вообще относительно очень незначительную ошибку. Поэтому полагаютъ, почти точно, $\Delta^n y = f^{(n)}(x)(\Delta x)^n$. Такъ какъ производная $f^{(n)}(x)$ обыкновенно имѣетъ умѣренныя значенія (по крайней мѣрѣ когда n не слишкомъ велико), то первая, вторая, третья,... разности соотвѣтственно могутъ быть сравниваемы съ Δx, $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$,..., т.-е. онѣ суть перваго, второго, третьяго,... порядка малости. Итакъ, если разсматривать функцію только въ видимомъ промежуткѣ, заключающемъ умѣренное число m выбранныхъ, равноотстоящихъ значеній перемѣннаго, и если, слѣдовательно, складывая по крайней мѣрѣ только m послѣдовательныхъ значеній *какой-либо* разности функціи, не *бояться* слишкомъ сильнаго накопленія ошибокъ, — то всѣ разности извѣстнаго и высшаго порядка, даже взятыя числами, будутъ такъ малы, что ихъ можно считать нулями. Тогда разность, наиболѣе возвышенная изъ про-

чихъ не пренебрегаемыхъ разностей, будетъ постоянна въ разсматриваемыхъ предѣлахъ и, будучи прибавляема къ самой себѣ, можетъ служить для исчисленія послѣдовательныхъ значеній предыдущей разности, начиная съ одного изъ нихъ, полученнаго прямо; изъ этихъ значеній точно такъ же будутъ получаться, посредствомъ простыхъ сложеній, значенія разности на единицу меньшаго порядка, и такъ далѣе вплоть до самыхъ значеній данной функціи, которая можетъ быть разсматриваема, какъ разность нулевого порядка.

Этотъ пріемъ не пригоденъ только тогда, когда функція варіируетъ очень быстро, быстрѣе, чѣмъ это обыкновенно бываетъ.

То же самое будетъ справедливо и при раціональной и цѣлой функціи степени m, если только она допускаетъ исчисленіе разностей вплоть до разностей m'аго порядка: дѣйствительно легко понять, посредствомъ непосредственнаго разложенія, что, при конечныхъ разностяхъ полинома $f(x)$, какъ и при его дифференціалахъ или его производныхъ, степень при x уменьшается на единицу при каждомъ дифференцированіи, т.-е. при переходѣ отъ полинома къ его разности или отъ одной разности къ слѣдующей; вслѣдствіе этого m'ая *разность — постоянное количество*.

53. — Частныя производныя различныхъ порядковъ и соотвѣтствующіе дифференціалы сложныхъ функцій.

Мы видѣли (№ 35) то, что касается до *первыхъ* частныхъ производныхъ сложной функціи $f(u, v, w)$ нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Напр., одна изъ нихъ, производная по u, есть $f'_u(u, v, w)$ или $\frac{f(u+du, v, w)-f(u, v, w)}{du} = \frac{\partial f}{\partial u}$ и соотвѣтствующая малая *частная разность* $f(u+\Delta u, v, w)-f(u, v, w)$, которая пишется черезъ $\Delta_u f$, имѣетъ выраженіе $[f'_u(u, v, w)+\varepsilon]\,\Delta u$. Но первая производная, будучи сама функціей отъ u, v, w, можетъ въ свою очередь имѣть частную производную или по отношенію къ u, или по отношенію къ v, или по отношенію къ w; и эти послѣднія такимъ образомъ будутъ *вторыми частными производными* данной функціи, производными, которыя будутъ писаться черезъ

$$f''_{u,u}(u, v, w),\quad f''_{u,v}(u, v, w),\quad f''_{u,w}(u, v, w)$$

или еще

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u},\quad \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u},\quad \frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Если въ функціи $\Delta_u f(u, v, w)$ придадутъ къ одному изъ ея трехъ перемѣнныхъ u, v, w малое увеличеніе Δu, или Δv, или Δw, *равное увеличенію того же имени, какое уже вводили для образованія первыхъ разностей*, то получимъ то, что называется *вторыми частными разностями* $\Delta_u\Delta_u f$, $\Delta_v\Delta_u f$, $\Delta_w\Delta_u f$.

Разсмотримъ напр. второе, $\Delta_v\Delta_u f$, увеличеніе $\Delta_u f$'а, которое получаетъ значеніе $[f'_u(u, v, w) + \varepsilon]\,\Delta u$, когда v увеличивается на Δv. Очевидно, это увеличеніе равняется произведенію постояннаго множителя Δu на частную разность по отношенію къ v, $\Delta_v f'_u(u, v, w) + \Delta_v\varepsilon$, перемѣннаго множителя; а въ этой разности $\Delta_v f'_u(u, v, w)$ и $\Delta_v\varepsilon$ кромѣ того получаютъ, все въ виду основного правила существованія производныхъ, выраженія

$$[f''_{u,v}(u, v, w) + \varepsilon_1]\,\Delta v\ ,\quad \left[\frac{d\varepsilon}{dv} + \varepsilon'\right]\Delta v,$$

гдѣ ε_1 и ε' означаютъ двѣ извѣстныя функціи, которыя уничтожаются съ Δv. Имѣемъ, слѣдовательно, одинаково съ (2)

(12) $$\Delta_v\Delta_u f = \left[f''_{u,v} + \varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon}{dv} + \varepsilon'\right]\Delta v\,\Delta u.$$

Но ε есть функція, которая при $\Delta u = 0$ уничтожается, каково бы ни было v, и даетъ $\dfrac{d\varepsilon}{dv} = 0$. А это значитъ, что производная $\dfrac{d\varepsilon}{dv}$, въ свою очередь функція u'а, v'а, w'а и Δu'а, для которой мы допускаемъ постепенное варіированіе по отношенію къ каждому изъ этихъ перемѣнныхъ, дѣлается сколь угодно малой, какъ и ε, когда Δu берется также очень малой. Итакъ, если назвать, напр., черезъ ε_2 сумму $\varepsilon_1 + \dfrac{d\varepsilon}{dv} + \varepsilon'$, уничтожающуюся, когда Δu и Δv стремятся одновременно къ нулю, то получаемъ соотношеніе, аналогичное (3):

(13) $$\Delta_v\Delta_u f = [f''_{u,v}(u, v, w) + \varepsilon_2]\,\Delta v\,\Delta u.$$

Эта частная разность $\Delta_v\Delta_u f$ есть также функція u'а, v, w.

Но можно взять разность по отношенію къ u, къ v, къ w, произведеніе постояннаго множителя $\Delta v\Delta u$ на соотвѣтственное увеличеніе множителя $f''_{u,v} + \varepsilon_2$: это будетъ *третьей частной разностью* или *разностью третьяго порядка*. И точно такъ же каждая вторая частная производная, дифференцированная по u, v, w, дастъ столько же *третьихъ частныхъ производныхъ*. Если, напр., варіируетъ w, то, очевидно, найдемъ, называя черезъ ε_3 количество, стремящееся къ нулю съ Δu, Δv и Δw,

(14) $$\Delta_w\Delta_v\Delta_u f = [f'''_{u,v,w}(u, v, w) + \varepsilon_3]\,\Delta w\,\Delta v\,\Delta u.$$

Мы получили бы подобную формулу для всякой другой разности какого угодно порядка.

Сходство между разностями какого-либо порядка и соотвѣтствующими производными, доказанное выше для функцій одного лишь перемѣннаго, существуетъ и въ сложныхъ функціяхъ, гдѣ заставляютъ раз-

...чныя перемѣнныя варіировать лишь послѣдовательно; это основано на тѣхъ же обстоятельствахъ, что и въ предыдущемъ случаѣ. Раздѣлимъ, напр., равенство (14) на произведеніе постоянныхъ множителей Δw, Δv, Δu; затѣмъ измѣнимъ Δ въ ∂ или разности въ *дифференціалы*, чтобы показать стремленіе перейти къ предѣлу, и, слѣдовательно, чтобы имѣть право уничтожить исчезающія количества, какъ ε_3. Тогда получимъ

(15) $$f'''_{u,v,w}(u, v, w) = \frac{\partial_w \partial_v \partial_u f}{\partial w\, \partial v\, \partial u}.$$

Такимъ образомъ, *всякая частная производная какого-либо порядка сложной функціи есть отношеніе аналогичнаго дифференціала функціи къ произведенію соотвѣтствующихъ дифференціаловъ (предполагаемыхъ постоянными) перемѣнныхъ.*

Частныя производныя какого-либо порядка сами будутъ простыми *дифференціальными частными*. Кромѣ того, въ числителяхъ уничтожаютъ значки u, v, w, какъ это дѣлали при частныхъ перваго порядка; дѣйствительно дифференціалы du, dv, dw соотвѣтствующихъ перемѣнныхъ фигурируетъ въ знаменателяхъ и указываютъ достаточно ясно, что дифференцированія должны быть производимы по отношенію къ этимъ перемѣннымъ, слѣдуя въ обратномъ порядкѣ съ тѣмъ, въ какомъ представляются ихъ дифференціалы; напр. производная $f'''_{u,v,w}$ напишется черезъ $\frac{\partial\partial\partial f}{\partial w\, \partial v\, \partial u}$ или проще, черезъ употребленіе *символическаго показателя*, равнаго числу послѣдовательныхъ ∂ числителя, $\frac{\partial^3 f}{\partial w\, \partial v\, \partial u}$.

54. — Нарушеніе порядка частныхъ дифференцированій.

Но даже не нужно наблюдать, въ какомъ порядкѣ слѣдуютъ дифференціалы du, dv, dw въ знаменателѣ; дѣйствительно, *всякая частная производная сохраняетъ ту же самую величину, если измѣняютъ по желанію порядокъ, въ какомъ идутъ дифференціалы, которые при этомъ показаны по отношенію къ различнымъ перемѣннымъ.*

Докажемъ сначала эту теорему для случая двухъ дифференцированій, предполагая, что будемъ имѣть, напр.

$$\frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial v\, \partial u} = \frac{\partial^2 v(u, v)}{\partial u\, \partial v}.$$

Очевидно, для этого достаточно увидѣть, что $\Delta_v \Delta_u f(u,v) = \Delta_u \Delta_v f(u,v)$, такъ какъ получится $\partial_v \partial_u f = \partial_u \partial_v f$ и, слѣдовательно, $\frac{\partial^2 f}{\partial v\, \partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v}$, не пренебрегая даже, въ этихъ двухъ предѣльныхъ отношеніяхъ, никакимъ уничтожающимся количествомъ. Дѣйствительно, $\Delta_u f$ обозначаетъ увели-

ченіе $f(u+\Delta u, v)-f(u, v)$, а его разность по отношенію къ v, превышеніе новаго значенія $f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u, v+\Delta v)$, получающагося отъ увеличенія v на Δv, надъ первымъ значеніемъ $f(u+\Delta u, v)-f(u, v)$, имѣетъ для разложеннаго выраженія

$$f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u, v+\Delta v)-f(u+\Delta u, v)+f(u, v)$$

и ясно, что если, напротивъ, заставить увеличиваться v сначала, а потомъ u, такъ, чтобы вычислить $\Delta_u \Delta_v f(u, v)$, то будемъ имѣть, по симметріи, равнозначащее выраженіе

$$f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u+\Delta u, v)-f(u, v+\Delta v)+f(u, v).$$

Поэтому можно нарушить порядокъ двухъ слѣдующихъ одно за другимъ дифференцированій. Но легко перейти отъ этого случая къ случаю какого угодно числа дифференцированій. Разсмотримъ, напр., производную $\frac{\partial^3 v}{\partial w\, \partial v\, \partial u}$, которая обозначаетъ, что дифференцировали f по отношенію къ u, затѣмъ результатъ по отношенію къ v и новый результатъ по отношенію къ w. Докажемъ, что дифференцированіе по u можетъ быть производимо не только первымъ, но вторымъ или третьимъ. Дѣйствительно, выраженіе $\frac{\partial^2 v}{\partial v\, \partial u}$, отъ котораго надо въ концѣ концовъ получить производную по отношенію къ w, не измѣнится, какъ мы видѣли, если нарушить порядокъ двухъ дифференцированій по v и u; а это дасть $\frac{\partial^3 v}{\partial w\, \partial u\, \partial v}$ вмѣсто $\frac{\partial^3 f}{\partial w\, \partial v\, \partial u}$, а такъ какъ, кромѣ того, новое выраженіе $\frac{\partial^3 f}{\partial w\, \partial u\, \partial v}$ можно написать черезъ $\frac{\partial^2}{\partial w\, \partial u}\frac{\partial f}{\partial v}$ или обозначить, что надо взять вторую производную по u и w функціи $\frac{\partial f}{\partial v}$, то эта вторая производная будетъ тѣмъ же самымъ, если даже измѣнить порядокъ дифференцированій или написать $\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial w}\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial^3 f}{\partial u\, \partial w\, \partial v}$. Такимъ образомъ, въ дроби, выражающей данную частную производную, символическій множитель $\frac{\partial}{\partial u}$, показатель извѣстнаго дифференцированія, можетъ быть взятъ по желанію на какомъ угодно мѣстѣ впереди функціи f, какъ будто онъ простой производитель умноженія. То же самое будетъ, очевидно, и для аналогичныхъ символическихъ множителей $\frac{\partial}{\partial v}$, $\frac{\partial}{\partial w}$, такъ что порядокъ дифференцированій не играетъ никакой роли.

Это обстоятельство можетъ служить для сколь-возможнаго упрощенія выраженія производныхъ, группируя въ знаменателяхъ входящіе въ нихъ по нѣскольку разъ дифференціалы. Напр., производная

$\dfrac{\partial^6 f}{\partial u\, \partial w\, \partial w\, \partial v\, \partial u\, \partial w}$ напишется черезъ $\dfrac{\partial^6 f}{\partial u^2\, \partial v\, \partial w^3}$: что касается до исчисленія ея, то оно ускорится, если начать съ дифференцированія, которое можетъ дать наиболѣе простую производную, затѣмъ производить то же самое надъ этой производной, полученной сначала, и т. д.

55. — Исчисленіе полныхъ производныхъ высшаго порядка сложныхъ функцій.

Посмотримъ теперь, какъ образуются послѣдовательныя производныя по отношенію къ x сложной функціи $y = f(u, v, w)$, въ которой u, v, w суть функціи x'а. Первая y', уже найденная (стр. 77), есть

$$(16) \qquad \frac{dy}{dx} = u'\frac{\partial f}{\partial u} + v'\frac{\partial f}{\partial v} + w'\frac{\partial f}{\partial w},$$

гдѣ производныя u', v', w' отъ u, v, w, обыкновенно, суть явныя функціи x'а. Но можетъ также случиться, что ихъ полученное выраженіе содержитъ u, v, w. Это бываетъ, когда u, v, w опредѣляются посредствомъ нерѣшенныхъ уравненій, такъ какъ тогда дифференцированіе этихъ уравненій дастъ, какъ мы видѣли, систему соотношеній первой степени, позволяющую получить u', v', w' выраженными явно черезъ u, v, w. Такимъ образомъ, въ самомъ общемъ случаѣ, производная y' представляется какъ функція x'а, u, v, w. Но можно заранѣе принять независящее перемѣнное x среди его функцій, названныхъ черезъ u, v, w, увеличивая по необходимости ихъ число на единицу: иначе говоря, ничто не мѣшаетъ взять, напр., $u = x$ или сохранить букву u для обозначенія и перемѣннаго x всякій разъ, какъ оно фигурируетъ непосредственно въ извѣстныхъ сложныхъ данныхъ функціяхъ; это можетъ быть даже тогда, когда функція f не содержитъ прямо или явно x, случай, гдѣ оно дѣлается независимымъ отъ u и даетъ просто $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 0$. Но если ввести такимъ способомъ x въ число перемѣнныхъ u, v, w, какъ мы и допустимъ, то станетъ ясно, что первая производная $u'\dfrac{\partial f}{\partial u} + v'\dfrac{\partial f}{\partial v} + w'\dfrac{\partial f}{\partial w}$ будетъ, въ наиболѣе общемъ случаѣ, новой явной функціей u'а, v, w. Правило, уже примѣненное къ дифференцированію $f(u, v, w)$'а, слѣдовательно, будетъ приложимо и здѣсь и дастъ производную y'', затѣмъ, также, y''' и такъ далѣе.

Формула, которая выводится непосредственно изъ (16) и которая есть формула символическая или выражающая не количества, но извѣстный способъ исчисленія, переводитъ очень просто это правило на аналитическій языкъ. Чтобы получить это, достаточно уничтожить въ (16) букву y или f, которая выражаетъ въ данную минуту дифференцирующуюся

функцію отъ u, v, w, однако сохраняя позднѣе эту букву для выраженія этой функціи сзади каждой части или каждаго члена. Получаемъ

$$(17) \qquad \frac{d}{dx} = u'\frac{\partial}{\partial u} + v'\frac{\partial}{\partial v} + w'\frac{\partial}{\partial w},$$

а это ясно показываетъ, что производная по x, или $\frac{d}{dx}$, какой угодно функціи отъ u, v, w получается, если отъ этой функціи взять $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$, $\frac{\partial}{\partial w}$, т.-е. производныя по u, v, w, затѣмъ соотвѣтственно умножить ихъ на u', v', w' и взять ихъ сумму.

Чтобы получить вторую производную, надо, слѣдовательно, приложить это правило къ первой производной, выражающейся второю частью (16)-го, помѣщая соотвѣтственно обѣ части (17)-го передъ соотвѣтствующими частями (16); и будемъ имѣть

$$(18) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(u'\frac{\partial}{\partial u} + v'\frac{\partial}{\partial v} + w'\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(u'\frac{\partial f}{\partial u} + v'\frac{\partial f}{\partial v} + w'\frac{\partial f}{\partial w}\right).$$

Такимъ образомъ, чтобы получить y'', надо взять производную по отношенію къ u, производную по отношенію къ v и производную по отношенію къ w каждаго изъ членовъ, которые составляютъ выраженіе во вторыхъ скобкахъ, затѣмъ соотвѣтственно умножить эти производныя на u', v', w' и составить сумму. При каждомъ частномъ дифференцированіи дифференцирующійся членъ, произведеніе двухъ множителей, дастъ вообще два члена; дѣйствительно будемъ имѣть, напр.,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(u'\frac{\partial f}{\partial u}\right) = u'\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(v'\frac{\partial f}{\partial v}\right) = v'\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}, \text{ etc.}$$

Это удвоеніе не имѣетъ мѣста, когда одинъ изъ множителей не содержитъ перемѣннаго u, v или w, по отношенію къ которому дифференцируютъ въ данную минуту. Особенно это будетъ при множителяхъ u', v', w', если они выражаются, какъ это обыкновенно бываетъ, явными функціями одного лишь независимаго перемѣннаго $u = x$; дѣйствительно ихъ производная по v, w будутъ тогда нуля, и какъ и ихъ производныя по u, тождественны полнымъ вторымъ производнымъ u'', v'', w'', изъ которыхъ первая, между прочимъ, обратится въ нуль, вслѣдствіе того, что предположеніе $u = x$ даетъ $u' = 1$, а $u'' = 0$.

Прилагая точно такъ же къ двумъ частямъ (18) правило дифференцированія, выраженное (17)-мъ, получимъ для третьей производной формулу

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^3y}{dx^3} = \left(u'\frac{\partial}{\partial u} + v'\frac{\partial}{\partial v} + w'\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(u'\frac{\partial}{\partial u} + v'\frac{\partial}{\partial v} + w'\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(u'\frac{\partial f}{\partial u} + \right. \\ \left. + v'\frac{\partial f}{\partial v} + w'\frac{\partial f}{\partial w}\right), \end{aligned} \right.$$

откуда можно перейти одинаково къ четвертой, пятой,... производнымъ.

Изъ предыдущихъ деталей видно, насколько длинны вообще, со второго порядка, разложенія этихъ производныхъ, разложенія, гдѣ могутъ фигурировать всѣ частныя производныя соотвѣтствующаго порядка и меньшихъ порядковъ функціи f. Поэтому-то и важно получше запомнить символическія формулы, которыя выведены изъ (17) и которыя выражаютъ ихъ болѣе сжатымъ образомъ.

Кромѣ того можно было бы во всѣхъ этихъ формулахъ уничтожить буквы y и f, какъ мы ихъ уничтожили въ (16) и писать лишь въ концѣ обѣихъ частей функцію, отъ которой берется производная. Формулы сдѣлаются тогда еще болѣе символичными или будутъ представлять только извѣстную совокупность дѣйствій, прилагаемыхъ къ количеству, обозначеніе котораго останется свободнымъ.

Наконецъ замѣтимъ, что независимое перемѣнное x могло бы также явно фигурировать въ функціи f, на ряду съ зависимыми перемѣнными v, w, не будучи обозначаемо специальной буквой. Тогда надо было бы, какъ объ этомъ говорили въ концѣ № 35 при первомъ порядкѣ, — избѣгать смѣшиванія частныхъ производныхъ отъ f, получающихся безъ варіированія v'а и w'а или отъ варіированія ихъ только по порядку и независимо отъ x $\left(\text{какъ въ } \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial v}\right)$, съ *полными* производными y'', y''',... Для этого будемъ обозначать эти послѣднія через $\frac{d^2}{dx^2}$, $\frac{d^3}{dx^3}$... согласно съ обозначеніемъ, указаннымъ въ № 35, *перваго полнаго дифференціала*; а обыкновенныя выраженія $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial v}$,... будутъ служить для частныхъ производныхъ.

56. — Производная высшаго порядка неявныхъ функцій.

Если y обозначаетъ перемѣнное, зависящее отъ x, то всякая сложная функція формы $F(x; y)$ очевидно обратится въ типъ $F(u, v)$ съ $u = x$, $v = y$; вслѣдствіе этого символическая формула дифференцированія (17) сдѣлается

(20) $$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y}.$$

Выражая y' съ помощью только одного x для того, чтобы можно было бы получать только послѣдовательныя полныя производныя y'', y'''..., мы получимъ, что первая производная $\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y}$ будетъ опять извѣстной функціей x'а и y'а, такъ какъ y' будетъ здѣсь разсматриваться, какъ явная функція x'а и такъ какъ $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ будутъ явными функціями x'а и y'а. Поэтому то же самое правило примѣнимо и къ этой первой про-

изводной и дастъ вторую производную, затѣмъ третью и т. д. Производя въ концѣ концовъ указанныя дифференцированія, получимъ

$$
(21)\quad\begin{cases}
\dfrac{dF}{dx}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+y'\dfrac{\partial}{\partial y}\right)F=\dfrac{\partial F}{\partial x}+y'\dfrac{\partial F}{\partial y},\\[2ex]
\dfrac{d^2F}{dx^2}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+y'\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}+y'\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)=\\[2ex]
\qquad=\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2\right)+\dfrac{\partial F}{\partial y}y'',\\[2ex]
\dfrac{d^3F}{dx^3}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+y'\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+y'\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}+y'\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)=\\[2ex]
\qquad=\left(\dfrac{\partial^3 F}{\partial x^3}+3\dfrac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y}y'+3\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2}y'^2+\dfrac{\partial^3 F}{\partial y^3}y'^3\right)+\\[2ex]
\qquad\qquad+3\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'\right)y''+\dfrac{\partial F}{\partial y}y''',\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Послѣдній членъ каждаго изъ этихъ разложеній, именно тотъ, гдѣ фигурируетъ возвышенная производная y'а такого же порядка, какого и полная исчисляемая производная отъ $F(x, y)$, — очевидно, получается отъ дифференцированія каждый разъ, въ членѣ $\frac{\partial F}{\partial y}y'$ первой производной, второго множителя, т.-е. $y', y'', y''', \ldots$ Этотъ послѣдній членъ, слѣдовательно, будетъ соотвѣтственно $\frac{\partial F}{\partial y}y'$, $\frac{\partial F}{\partial y}y''$, $\frac{\partial F}{\partial y}y''', \ldots$; онъ всегда первой степени по отношенію къ соотвѣтствующей или наивозвышенной производной $y', y'', y''', \ldots$

Если же выбрать y такъ, чтобы функція $F(x, y)$ оставалась постоянной, или, иначе, если дана неявная функція, опредѣляющаяся уравненіемъ $F(x, y)=c$, — то всѣ полныя производныя F'а будутъ нули; и ихъ послѣднія разложенныя выраженія (21), равныя нулю, а затѣмъ раздѣленныя на $-\frac{dF}{dy}$, дадутъ непосредственно y', или y'', или $y''', \ldots$ въ видѣ явной и раціональной функціи послѣдовательныхъ частныхъ производныхъ функціи F, а также и производныхъ $y', y'', y''', \ldots$, менѣе возвышенныхъ, чѣмъ разсматриваемая, производныхъ, которыя можно замѣнить ихъ величинами, полученными уже такимъ же образомъ. Въ концѣ концовъ, всѣ эти производныя, какъ это мы видѣли въ № 39 при первой изъ нихъ y', получатся въ видѣ явной функціи x'а и y'а; и ихъ выраженія будутъ раціональны не менѣе, чѣмъ выраженіе y'а, если первая часть даннаго уравненія сама раціональна. Итакъ, можно будетъ приложить къ производнымъ высшаго порядка неявной функціи всѣ замѣчанія, сдѣланныя въ № 39 относительно первой производной.

То же самое будетъ, если имѣемъ нѣсколько одновременныхъ неявныхъ функцій y, z,..., опредѣленныхъ одинаковымъ числомъ уравненій формы $F(x, y, z...) = c$. Дифференцированіе этихъ послѣднихъ, дѣйствительно, будетъ произведено посредствомъ формулы

$$(22) \qquad \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z} + \cdots,$$

такъ что въ различныхъ полныхъ производныхъ функцій F члены, которые будутъ содержать наиболѣе возвышенныя производныя y'а, z,... будутъ

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' + \ldots, \quad \text{или} \quad \frac{\partial F}{\partial y} y'' + \frac{\partial F}{\partial z} z'' \ldots, \text{ и т. д.}$$

Приравнивая полныя производныя къ нулю, будемъ имѣть либо по отношенію къ y', z',... либо — къ y'', z'',... либо — къ y''', z'''..., etc. всегда столько же системъ уравненій первой степени, въ которыхъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ будутъ соотвѣтственно такими же, какимъ былъ коэффиціентъ, $\frac{\partial F}{\partial y}$, искомой производной y'а въ предыдущемъ случаѣ. Рѣшеніе этихъ системъ уравненій дастъ y', z',..., затѣмъ y'', z'',..., затѣмъ y''', z''',..., etc. въ видѣ раціональной функціи послѣдовательныхъ частныхъ производныхъ функцій F.

58. — Дифференцированіе функціи линейныхъ функцій.

Когда перемѣнныя u, v, w сложной функціи $y = f(u, v, w)$ зависятъ линейно отъ независимаго перемѣннаго x, или когда онѣ имѣютъ выраженія, какъ

$$u = ax + A, \quad v = bx + B, \quad w = cx + C,$$

гдѣ a, b, c, A, B, C обозначаютъ постоянныя, то форма производныхъ высшаго порядка сложной функціи очень упрощается. Дѣйствительно, коэффиціенты u', v', w' второй части символической формулы (17) обращаются тогда въ постоянныя a, b, c; поэтому новыя дифференцированія, указанныя въ (18), затѣмъ въ (19) etc., не получаютъ удвоенія членовъ, какъ только частная производная f'а, фигурирующая въ каждомъ изъ тѣхъ, которые дифференцируются, есть перемѣнный множитель, передъ которымъ надо ставить символическій множитель $\frac{\partial}{\partial u}$, или $\frac{\partial}{\partial v}$, или $\frac{\partial}{\partial w}$; всѣ другіе выходятъ изъ этого знака дифференцированія, или берутся въ видѣ постоянныхъ коэффиціентовъ, какъ будто бы выра-

женіе $a\frac{\partial}{\partial u}+b\frac{\partial}{\partial v}+c\frac{\partial}{\partial w}$, которое показываетъ, какія надо производить дифференцированія, есть алгебраическій полиномъ, умножающійся на дифференцирующееся выраженіе. Производимая безконечно-малая операція, слѣдовательно, очень походитъ на умноженіе многочленовъ и будетъ производиться, въ нѣкоторомъ родѣ, механически, какъ эта алгебраическая операція. Во всякомъ случаѣ она разложится на тѣ элементарныя операціи, которыя, при умноженіи, имѣли бы мѣсто для полученія произведенія постояннаго множителя на различные перемѣнные множители формы $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$, $\frac{\partial}{\partial w}$, но которыя здѣсь, хотя и указанныя тѣмъ же самымъ способомъ, имѣютъ мѣсто для полученія произведенія постояннаго множителя на частную производную, которую представляютъ, въ сокращенномъ видѣ, эти выраженія $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$, $\frac{\partial}{\partial w}$, когда ихъ заставляютъ быть рядомъ съ данной функціей $f(u, v, w)$.

Благодаря этой аналогіи, формулы (18), (19),... напишутся такъ:

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(a\dfrac{\partial}{\partial u}+b\dfrac{\partial}{\partial v}+c\dfrac{\partial}{\partial w}\right)^2 f, \\ \dfrac{d^3y}{dx^3}=\left(a\dfrac{\partial}{\partial u}+b\dfrac{\partial}{\partial v}+c\dfrac{\partial}{\partial w}\right)^3 f, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ; \end{cases}$$

выраженія, разложеніе которыхъ дастъ

$$(27)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}=a^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+b^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}+c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial w^2}+2bc\dfrac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial w}+2ca\dfrac{\partial^2 f}{\partial w\,\partial u}+2ab\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Они будутъ походить на соотвѣтствующія степени полинома.

62. — Замѣна перемѣнныхъ.

Первыя перемѣнныя, которыя даются въ вопросѣ и изъ которыхъ, напр., одно, x, есть независящее, тогда какъ остальныя y, z,... суть функціи этого независящаго, не всегда самыя удобныя для разсматриванія въ томъ смыслѣ, что существуютъ другія перемѣнныя, связанныя довольно простыми уравненіями съ x, y, z... и упрощающія, будучи поставлены на мѣсто первыхъ, эти соотношенія или дѣлающія ихъ гораздо болѣе удобными для нахожденія способа варіированія неизвѣстныхъ количествъ. Итакъ, слѣдуетъ найти, какимъ образомъ послѣдовательныя производныя по x отъ y, z,..., могущія фигурировать въ данныхъ соотношеніяхъ, выражаются посредствомъ новыхъ перемѣнныхъ, $\xi, \eta, \zeta,\dots$, которыми хотятъ замѣнить x, y, z,...

Назовемъ независящимъ перемѣннымъ между новыми перемѣнными напр. ξ. Такъ какъ предыдущее независимое перемѣнное x варіируетъ въ то же время, какъ и это послѣднее, то каждая изъ нихъ будетъ равняться извѣстной функціи другого; для ясности я назову черезъ φ функцію, которая выражаетъ такимъ образомъ x посредствомъ ξ; иначе говоря, я положу $x=\varphi(\xi)$ и ξ, въ то же время зависящее отъ x, будетъ обратной функціей, производная которой $\frac{d\xi}{dx}$ равняется, какъ извѣстно, $\frac{1}{\varphi'(\xi)}$. Положивъ это, мы будемъ имѣть, что всѣ разсматриваемыя перемѣнныя, одновременно варіирующія опредѣленнымъ образомъ, суть функція одного кого-либо изъ нихъ и можно, съ одной стороны, ихъ разсматривать, какъ зависящія отъ ξ, и въ то же время, съ другой стороны, разсматривать ξ, какъ зависящее отъ x. Функція y, напр., будетъ такимъ образомъ функціей x'а посредствомъ промежуточной функціи ξ'а; и будемъ имѣть, по правилу дифференцированія функцій отъ функціи, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=\frac{dy}{d\xi}\frac{1}{\varphi'(\xi)}$, соотношеніе, обозначающее, что производная по отношенію къ x какой-либо функціи y получится отъ умноженія на множитель $\frac{1}{\varphi'(\xi)}$ производной по ξ этой функціи y. А это еще лучше будетъ выражать, если назвать для большей краткости черезъ x' производную $\varphi'(\xi)$ отъ x по отношенію къ ξ, — символическая формула

$$(38)\qquad \frac{d}{dx}=\frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{d}{d\xi}\quad \text{или}\quad \frac{d}{dx}=\frac{1}{x'}\frac{d}{d\xi},$$

въ которой оставлено пустымъ мѣсто функціи y, чтобы можно было на немъ написать какую угодно функцію x'а или ξ'а. Итакъ разсматриваемая задача будетъ рѣшена для первой производной всякой данной функціи, если заранѣе выразить x посредствомъ новыхъ перемѣнныхъ ξ, η, ζ, такъ, чтобы можно было во второй части (38)-ого замѣнить производную $\varphi'(\xi)$ или x' значеніемъ, исключительно зависящимъ отъ этихъ перемѣнныхъ или ихъ производныхъ по ξ, и если выразить точно такъ же въ этой второй части дифференцирующееся количество, которое хотятъ уничтожить въ формулахъ, въ видѣ функціи новыхъ перемѣнныхъ $\xi, \eta, \zeta, \ldots$

Но первая производная $\frac{dy}{dx}$ напр., получающаяся такимъ образомъ, будетъ новой функціей ξ'а или x'а, къ которой правило дифференцированія по x, выражающееся символической формулой (38) не менѣе относится, чѣмъ къ самой функціи y. Поэтому будутъ имѣть для вто-

рой производной отъ y по x, затѣмъ для третьей и т. д. выраженія, болѣе и болѣе сложныя,

$$(39)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x'}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{x'}\frac{dy}{d\xi}\right)\quad,\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x'}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{x'}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{x'}\frac{dy}{d\xi}\right)\right],\dots$$

Разложимъ вычисленія, обозначая для сокращенія черезъ y' производную отъ y по отношенію къ ξ и вспоминая правило дифференцированія дроби (стр. 33). Тогда получится, послѣ непосредственныхъ приведеній, начиная съ первой производной, и если, кромѣ того назвать черезъ x'', x''',.., y'', y''',... послѣдовательныя производныя отъ x и y по ξ,

$$(40)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}, \\[2mm] \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{x'y''-y'x''}{x'^3}, \\[2mm] \dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{x'(x'y'''-y'x''')-3x''(x'y''-y'x'')}{x'^5}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Мы видимъ, что прежняя производная извѣстнаго порядка функціи вообще будетъ требовать, для своего выраженія посредствомъ новыхъ перемѣнныхъ, употребленія всѣхъ новыхъ послѣдовательныхъ производныхъ какъ этой функціи, такъ и прежняго независимаго перемѣннаго, вплоть до производныхъ разсматриваемаго порядка.

Если взять, въ частности, за функцію y новое независимое перемѣнное ξ, обратную функцію отъ $x=\varphi(\xi)$, то будемъ имѣть для ея первой производной y' значеніе $\dfrac{d\xi}{d\xi}$ или 1; и, слѣдовательно, болѣе возвышенныя функціи y'', y''',... будутъ нули. Получится

$$(41)\qquad \frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{x'},\quad \frac{d^2\xi}{dx^2}=-\frac{x''}{x'^3},\quad \frac{d^3\xi}{dx^3}=\frac{3x''^2-x'x''x'''}{x'^5},\dots$$

Таковы соотношенія, существующія между послѣдовательными производными извѣстной функціи x отъ ξ и производными обратной функціи ξ, разсматриваемой какъ зависящее отъ x. Первое изъ этихъ соотношеній даетъ намъ формулу, уже употребленную нами нѣсколько разъ, первой производной обратной функціи.

63. — Примѣры упрощеній, происходящихъ отъ такихъ замѣнъ.

Вотъ три примѣра, изъ которыхъ два первыхъ очень важны, упрощеній, которыя могутъ произойти въ формулахъ задачи отъ употребленія извѣстныхъ замѣнъ перемѣнныхъ.

Требуется найти общее выраженіе функцій y отъ x, къ которымъ ихъ производная была бы постоянно пропорціональна, или которыя, въ другихъ словахъ, удовлетворяли бы при всѣхъ значеніяхъ x уравненіе $\frac{dy}{dx} - ay = 0$, гдѣ a обозначаетъ данный коэффиціентъ пропорціональности. Это уравненіе можно написать еще, въ формѣ отчасти символической, черезъ

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right) y = 0, \tag{42}$$

гдѣ выраженіе $\left(\frac{d}{dx} - a\right) y$ означаетъ, что и здѣсь надо поступать, какъ если бы $\frac{d}{dx} - a$ было алгебраическое количество, умножаемое на y, но разсматривая затѣмъ въ результатѣ настоящее умноженіе только при членѣ $-ay$, единственномъ, который можетъ быть произведеніемъ, и объясняя это умноженіе въ смыслѣ дифференцированія при другомъ членѣ $\frac{d}{dx} y$ или $\frac{dy}{dx}$, который ясно представляется производной и не имѣетъ другого смысла. Далѣе можно видѣть, что уравненіе, раздѣленное на a, обращается въ $\frac{dy}{a\,dx} - y = 0$ или $\frac{dy}{d(ax)} - y = 0$, и что, если взять ax за новое перемѣнное ξ, то постоянное a уже не явится. Положимъ, на самомъ дѣлѣ,

$$\xi = ax, \quad \text{откуда } x = \frac{\xi}{a}, \quad x' = \frac{1}{a}, \quad \frac{dy}{dx} = a\frac{dy}{d\xi};$$

уравненіе $\frac{1}{a}\frac{dy}{dx} - y = 0$ вполнѣ обращается въ $\frac{dy}{d\xi} - y = 0$. Функція y отъ ξ слѣдовательно равна своей производной, какъ экспонентное количество e^{ξ}; а это заставляетъ думать, что она (функція) должна варіировать такимъ же образомъ, какъ и ея производная, или она остается пропорціональной ей. Такъ какъ отношеніе y'а къ e^{ξ} имѣетъ такимъ образомъ очень простое выраженіе, то возьмемъ его за нашу новую функцію η, или положимъ $y = e^{\xi}\eta$. Произведеніе $e^{\xi}\eta$, поставленное на мѣсто y въ уравненіи, вмѣстѣ съ своей производной по ξ, которая есть $e^{\xi}\frac{d\eta}{d\xi} + e^{\xi}\eta$, даетъ, по приведеніи и раздѣленіи въ концѣ концовъ

на множитель ϵ^{ξ} (конечный и отличающійся отъ нуля при всѣхъ конечныхъ значенія ξ), $\frac{d\eta}{d\xi}=0$; и уравненіе задачи вслѣдствіе этого дѣлается столь простымъ, что объясненіе его получается непосредственно, такъ какъ оно выражаетъ, что функція η, имѣющая свою производную тождественною съ нулемъ, можетъ быть лишь какимъ-либо постояннымъ c, а ничѣмъ другимъ. Итакъ общее искомое выраженіе y есть ce^{ξ}, т.-е. $ce^{\alpha x}$.

Усложняя немного вопросъ, поищемъ, во-вторыхъ, функціи x'а, вторыя производныя которыхъ состоятъ изъ двухъ пропорціональныхъ, одна къ самой функціи y, а другая къ ея первой производной, частей. Эта вторая часть есть $2\alpha\frac{dy}{dx}$, если α обозначаетъ $\frac{1}{2}$ ея коэффиціента, а первая часть, произведеніе y'а на постоянное, можетъ всегда быть въ формѣ $-(\alpha^2\pm\beta^2)y$, если называть черезъ β^2 абсолютную величину положительной или отрицательной суммы этого постояннаго и квадрата α^2 предыдущей α. Задача рѣшается уравненіемъ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\alpha\frac{dy}{dx}-(\alpha^2\pm\beta^2)y \quad \text{или} \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}-2\alpha\frac{dy}{dx}+\alpha^2y\right)\pm\beta^2y=0.$$

Но можно написать также, посредствомъ отчасти символической, какъ и предыдущая (42), формулы,

$$(43)\qquad \left(\frac{d^2}{dx^2}-2\alpha\frac{d}{dx}+\alpha^2\right)y\pm\beta^2y=0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)^2y\pm\beta^2y=0,$$

гдѣ выраженіе $\left(\frac{d^2}{dx}-\alpha\right)^2$ обозначаетъ, по желанію, или разложеніе $\frac{d^2}{dx^2}-2\alpha\frac{d}{dx}+\alpha^2$, которое будетъ квадратомъ, если $\frac{d}{dx}$ выражаетъ количество, или повтореніе операціи, указываемой $\frac{d}{dx}-\alpha$, т.-е. (въ виду слѣдующей буквы y) выраженіе $\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left(\frac{dy}{dx}-\alpha y\right)$, которое означаетъ, что надо взять производную по x функціи $\frac{dy}{dx}$ αy и вычесть произведеніе α'ы на эту самую функцію. Дѣйствительно, это выраженіе приводитъ къ разложенію предшествующаго трехчлена, вслѣдствіе того, что членъ $-\alpha y$ имѣетъ свой коэффиціентъ α постояннымъ и не даетъ при дифференцированіи мѣста никакому удвоенію, вслѣдствіе чего эта операція указываетъ на способъ алгебраическаго умноженія перемѣнной дроби $\frac{d}{dx}$ на $-\alpha y$, произведеніе которой будетъ $-\alpha\frac{dy}{dx}$.

Такъ какъ намъ пришлось видѣть, что выраженіе $\frac{dy}{dx}-\alpha y$ очень упрощается отъ вставленія на мѣсто y'а новаго перемѣннаго η, полу-

чающагося отъ предположенія $y = \eta e^{\alpha x}$, то введемъ это послѣднее. Производная отъ $\eta e^{\alpha x}$ будетъ $\frac{d\eta}{dx} e^{\alpha x} + \alpha \eta e^{\alpha x}$, такъ что получится для ея превышенія надъ αy выраженіе $\frac{d\eta}{dx} e^{\alpha x}$. Это выраженіе аналогично выраженію $\eta e^{\alpha x}$, откуда мы и отправились, поэтому, прилагая къ нему дѣйствіе, указанное новымъ символическимъ множителемъ $\frac{d}{dx} - \alpha$, мы получимъ, что оно даетъ точно такъ же $\frac{d^2\eta}{dx^2} e^{\alpha x}$. Второе уравненіе (43), раздѣленное на $e^{\alpha x}$, затѣмъ на β^2, сдѣлается

$$(44) \qquad \frac{d^2\eta}{dx^2} \pm \beta^2 \eta = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2\eta}{dx^2} \pm \eta = 0;$$

наконецъ достаточно взять для новаго независимаго перемѣннаго ξ произведенію βx, т.-е. положить

$$x = \frac{\xi}{\beta}; \quad \text{откуда} \quad \frac{d}{dx} = \beta \frac{d}{d\xi}; \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \beta \frac{d}{d\xi}\left(\beta \frac{d\eta}{d\xi}\right) = \beta^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2},$$

чтобы это уравненіе обратилось въ очень простое $\frac{d^2\eta}{dx} \pm \eta = 0$. Итакъ, данный вопросъ приводится къ отысканію функцій η отъ ξ, которыя равнялись бы по абсолютной величинѣ своей второй производной, имѣющей обратный или тотъ же знакъ, смотря по тому, какой берется въ (43) знакъ при членѣ $\pm \beta^2 y$, верхній $+$ или нижній $-$. Непосредственно можно видѣть, что въ первомъ случаѣ, функціи $\eta = \cos\xi = \cos\beta x$ и $\eta = \sin\xi = \sin\beta x$ будутъ удовлетворять уравненію (44), а слѣдовательно, выраженія $y = e^{\alpha x}(\cos\beta x$ или $\sin\beta x)$ — предположенному уравненію (43); между тѣмъ, во второмъ случаѣ, рѣшенія, аналогичныя предыдущимъ, $\eta = \cosh\xi$ или $\sinh\xi$, $y = e^{\alpha x}(\cosh\beta x$ или $\sinh\beta x)$ и рѣшеніе, еще болѣе простое, $\eta = e^{\xi}$, $y = e^{\alpha x} e^{\beta x} = e^{(\alpha+\beta)x}$, точно такъ же приходятъ на умъ. Но постоянное β, опредѣляющееся единственно, какъ квадратный корень даннаго положительнаго количества β^2, по желанію, можно взять съ знакомъ $+$ или $-$; но это не измѣняетъ ничего, по крайней мѣрѣ въ абсолютной величинѣ, въ этихъ выраженіяхъ y'а, гдѣ входитъ либо синусъ, либо косинусъ, обыкновенные или гиперболическіе; это имѣетъ болѣе важности для послѣдняго выраженія $y = e^{(\alpha+\beta)x}$, которое даетъ тогда двѣ различныя экспонентныя функціи $y = e^{(\alpha+\beta)x}$.

Резюмируемъ предыдущее: производимая замѣна перемѣнныхъ, измѣняя уравненіе (43) въ простую форму $\eta'' = \mp \eta$, заставляетъ насъ не-

посредственно узнать при этомъ уравненіи (43): 1) два рѣшенія

$$y = e^{\alpha x}(\cos\beta x \text{ или } \sin\beta x),$$

когда послѣдній членъ $\pm\beta^2 y$ взять съ верхнимъ знакомъ $+$, и 2) по желанію, два рѣшенія

$$y = e^{\alpha x}(\cosh\beta x \quad \text{или} \quad \sinh\beta x) \quad \text{или два} \quad y = e^{(\alpha\pm\beta)x},$$

когда этотъ послѣдній членъ $\pm\beta^2 y$ взять съ нижнимъ знакомъ $-$. Намъ придется въ интегральномъ исчисленіи показать, что требуемое общее выраженіе y'а получается отъ образованія, въ каждомъ случаѣ, суммы двухъ рѣшеній или найденныхъ такимъ образомъ частныхъ выраженій, послѣ того какъ умножимъ ихъ соотвѣтственно на два произвольныхъ постоянныхъ c, c_1.

Наконецъ, какъ третій примѣръ, предположимъ функцію y отъ x могущую удовлетворить уравненіе

$$(45)\qquad \left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)^2\left(2A - l^2\frac{d^2y}{dx^2}\right) = (1\pm k^2)y,$$

которое есть уравненіе задачи натящагося бруска, о которой мы говорили въ четвертой главѣ (стр. 74): A, l, k здѣсь суть три положительныхъ постоянныхъ и x варіируетъ отъ $-l$ до l. Я узналъ, что для независимаго перемѣннаго ξ приходится брать число, гиперболическій тангенсъ котораго равенъ отношенію $\frac{x}{l}$, число, увеличивающееся отъ $-\infty$ до ∞, тогда какъ это отношеніе увеличивается отъ -1 до 1, и для функціи η произведеніе $\frac{y}{A}$ на $\cosh\xi$. Итакъ, положимъ: съ одной стороны

$$(46)\qquad x = l\,\text{tangh}\,\xi; \quad \text{отсюда } x' = \frac{l}{\cosh^2\xi} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx} = \frac{\cosh^2\xi}{l}\frac{d}{d\xi},$$

а съ другой стороны

$$(47)\qquad \begin{cases} y = \dfrac{A\eta}{\cosh\xi}, \\ \text{откуда} \\ \dfrac{dy}{dx} = A\dfrac{\cosh^2\xi}{l}\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{\eta}{\cosh\xi}\right) = \dfrac{A}{l}\left(\dfrac{d\eta}{d\xi}\cosh\xi - \eta\sinh\xi\right), \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{A}{l^2}\cosh^2\xi\,\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{d\eta}{d\xi}\cosh\xi - \eta\sinh\xi\right) = \dfrac{A}{l^2}\cosh^3\xi\left(\dfrac{d^2\eta}{d\xi^2} - \eta\right). \end{cases}$$

Уравненіе (45), гдѣ кромѣ того $1-\frac{x^2}{l^2}=1-\mathrm{tgh}^2\xi$ будетъ ничѣмъ инымъ, какъ обратнымъ отъ $\cosh^2\xi$, въ концѣ концовъ сдѣлается, посредствомъ двухъ ясныхъ приведеній,

(48) $$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\pm k^2\eta=\frac{2}{\cos \mathrm{h}^2\xi}\,.$$

Оно отличается отъ предыдущаго (44), исключая измѣненія β'ы въ k и y'а въ ξ, только прибавленіемъ ко второй части члена, явной функціи независимаго перемѣннаго; и мы увидимъ въ интегральномъ исчисленіи, какимъ образомъ его рѣшенія выводятся изъ рѣшеній болѣе простого уравненія (44).

ГЛАВА VI.

Функціи нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ и замѣны этихъ перемѣнныхъ. *Примѣненіе этого къ функціямъ точки и къ изотропіи тѣлъ.

64.—Ассимиляція нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ съ произвольными функціями одного только перемѣннаго. Полный и частные дифференціалы какой-либо функціи.

Мы уже имѣли нѣсколько разъ случай наблюдать, что функція точки $u = f(x, y, z)$, зависящая отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ x, y, z, дѣлается функціей только одного независимаго s, когда при различныхъ точкахъ разсматриваютъ только линію, проходящую внутри пространства, гдѣ существуетъ функція; дѣйствительно, въ $f(x, y, z)$, координаты x, y, z тогда будутъ функціями пути s, простирающагося вдоль этой линіи отъ извѣстнаго начала до разсматриваемой точки. Можно даже, для большаго обобщенія, предположить линію, пробѣгаемую мобилемъ, и взять за независимое перемѣнное время t, отсчитываемое отъ какого-либо момента движенія до мгновенія, когда мобиль достигаетъ точки (x, y, z). Тогда станетъ очевиднымъ, что, если выбрать по желанію прямую траекторію и природу движенія, то мобиль можетъ въ каждое мгновеніе гдѣ-нибудь да быть, въ особенности, если вообразить себѣ, что онъ проходитъ неравномѣрно, безъ перехода съ одного мѣста на другое, а временами уничтожаясь въ одномъ мѣстѣ и тотчасъ снова появляясь въ другомъ. Итакъ, если даже и не употреблять этой послѣдней концепціи (физически невозможной) мгновеннаго конечнаго перемѣщенія, все же x, y, z будутъ безпрерывными, но абсолютно какими-угодно, или *произвольными* функціями t'а; этого не будетъ только тогда, когда описываемый путь s служитъ независимымъ перемѣннымъ, въ виду соотношенія, которое существуетъ (стр. 40),—въ параллелепипедѣ, имѣющемъ изъ вершины (x, y, z), по направленію осей, ребра dx, dy, dz,—между этими ребрами и діагональю ds, выходящей изъ этой вершины. А такъ какъ, кромѣ того, всякая точка (x, y, z) можетъ быть соединена линіей со всякой другой, или такъ какъ каждое значеніе функціи не будетъ пренебрегаемо, если постараться свободно выбрать способъ варіированія (вмѣстѣ съ t) x, y, z, то отсюда видно, что $f(x, y, z)$ мо-

жетъ быть вполнѣ ассимилирована съ сложной функціей одного лишь перемѣннаго t и разсматриваемыя x, y, z этой функціи дѣлаются тогда *произвольными функціями* этого послѣдняго.

Вообще, будутъ ли независимыя перемѣнныя x, y, z координатами или нѣтъ, варіируютъ ли онѣ *одновременно* или *изолированно* другъ отъ друга, все равно онѣ будутъ всегда измѣняться извѣстнымъ способомъ, который, правда, свободно выбирается и измѣняется по желанію. Поэтому, въ каждомъ частномъ случаѣ, если x, напр., варіируетъ, то его различнымъ значеніямъ будутъ соотвѣтствовать извѣстныя значенія y и z, что заставляетъ сказать, что y и z могутъ быть разсматриваемы, какъ функціи x'а; или еще, если, для большей симметріи и для того, чтобы не придать x большей важности, чѣмъ y и z, вообразить, что x, y, z получаютъ вмѣстѣ, въ одно и то же вычисленное время t, серіи значеній, которыя къ нимъ можно приложить, — то x, y, z будутъ функціями вспомогательнаго перемѣннаго t. Такимъ образомъ, *нѣсколько независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z могутъ быть разсматриваемы, какъ произвольныя функціи одного только перемѣннаго*; и ихъ собственныя функціи, *сдѣлавшіяся сложными функціями*, допускаютъ всѣ общія свойства, происходящія отъ постепеннаго измѣненія, которое имѣютъ сложныя функціи, когда способъ взаимной зависимости ихъ перемѣнныхъ остается какимъ угодно.

Въ частности, когда $u = f(x, y, z)$ есть одна изъ такихъ функцій и когда придаютъ къ x, y, z очень малыя положительныя или отрицательныя увеличенія Δx, Δy, Δz, то ея одновременное увеличеніе Δu будетъ по соотношенію (4) предпослѣдней главы (стр. 77)

$$(1) \qquad \Delta u = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon\right)\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon_1\right)\Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \varepsilon_2\right)\Delta z,$$

или съ относительной — пренебрегаемой ошибкой

$$(2) \qquad \Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z,$$

какъ въ приближенныхъ исчисленіяхъ, гдѣ Δx, Δy, Δz будутъ очень сосѣдними съ нулемъ, такъ и при разсматриваніи безконечно малыхъ измѣненій, гдѣ заставляютъ это выраженіе Δu служить лишь для вычисленія результатовъ предѣловъ. Остановимся на второмъ случаѣ, вытекающемъ изъ перваго въ № 36, и, обращаясь къ обозначенію Лейбница, замѣнимъ Δ'ы черезъ d или *конечныя разности дифференціалами*, чтобы показать свое желаніе заставить Δx, Δy, Δz окончательно уничтожиться при разсмотрѣніи только предѣловъ отношеній или суммъ. Варіація Δu, приведенная къ своей *вліяющей* части, будетъ

$$(3) \qquad du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Назовемъ ее *полнымъ дифференціаломъ* въ противоположность съ членами $\frac{\partial f}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f}{\partial y}dy$, $\frac{\partial f}{\partial z}dz$, которые составляютъ его и которые называются *частными дифференціалами* u'а по отношенію къ x, y или z, потому что онѣ составляютъ то, къ чему приведется полный дифференціалъ du, если заставлять варіировать только x, y или z. Поэтому, *полный дифференціалъ или безконечно-малая варіація функціи есть сумма частныхъ дифференціаловъ, т.-е. увеличеній, которыя она получила бы, если бы одно только изъ ея независимыхъ перемѣнныхъ получило бы свое дѣйствительное безконечно-малое увеличеніе, всѣ же остальныя сохраняли бы свои предшествующія значенія.*

65. Дифференцированіе сложныхъ функцій нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Пусть будетъ теперь $w = f(u, v)$ функція нѣсколькихъ перемѣнныхъ u и v, которыя сами суть функція независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z. Такъ какъ послѣднія въ свою очередь могутъ считаться зависящими отъ послѣдняго и единственнаго перемѣннаго t, то предыдущія u, v, а слѣдовательно и w, будутъ опять сложными функціями t'а. Итакъ, будемъ имѣть

$$dw = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv.$$

Только въ этой формулѣ, du, dv, dw получатъ нѣсколько смысловъ: дѣйствительно, это будутъ полные дифференціалы или частные дифференціалы, смотря по тому, заставляютъ ли x, y, z варіировать вмѣстѣ или отдѣльно.

Предположимъ, напр., что варіируетъ только x. Тогда, раздѣливъ выраженіе на dx, получимъ

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}, \tag{4}$$

соотношеніе, изъ котораго выводится, очевидно, если обозначить черезъ u'_x, v'_x первыя частныя производныя отъ u и v, слѣдующая символическая формула для дифференцированія по отношенію къ x всякой функціи u'а и v'а.

$$\frac{\partial}{\partial x} = u'_x\frac{\partial}{\partial u} + v'_x\frac{\partial}{\partial v}. \tag{5}$$

То же самое будемъ имѣть для дифференцированія функціи u'а, v'а по отношенію къ y или z; дѣйствительно, для этого достаточно замѣ-

нить въ (5) буквы и значки x черезъ y или черезъ z. Для того же, чтобы сократить мѣсто, которое занимають частныя производныя, намъ иногда случится писать нѣсколько ихъ вмѣстѣ, ставя въ скобкахъ буквы, которыя могутъ быть соотвѣтственно замѣнены одна другой. Здѣсь, напр., формула (5) и ея двѣ аналогичныя напишутся, такимъ образомъ, всѣ за одинъ разъ:

$$(5 \text{ bis}) \qquad \frac{\partial}{\partial(x, y, z)} = (u'_x, u'_y, u'_z)\frac{\partial}{\partial u} + (v'_x, v'_y, v'_z)\frac{\partial}{\partial v}.$$

Онѣ выражаютъ, что *производная сложной функціи по отношенію къ одному независимому перемѣнному есть сумма послѣдовательныхъ произведеній ея частныхъ производныхъ, соотвѣтствующихъ перемѣннымъ, отъ которыхъ она зависитъ непосредственно, на частныя производныя этихъ перемѣнныхъ, взятыхъ по отношенію къ разсматриваемому независимому перемѣнному.*

Можно безъ труда перейти отъ частныхъ производныхъ перваго порядка функціи $f(u, v)$ къ производнымъ высшаго порядка, замѣчая, что въ формулѣ (4) или въ прочихъ подобныхъ частныя производныя f'а по u и v, которыя фигурируютъ здѣсь, суть, какъ f, явныя функціи u'а и v'а и онѣ, дифференцируются по символическимъ формуламъ (5 bis). Возьмемъ, напр. производную $\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}$, дифференцируя по отношенію къ y выраженіе (4) $\frac{\partial w}{\partial x}$. Такъ какъ

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} = u'_y \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + v'_y \frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} = u'_y \frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} + v'_y \frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

то получается, если назвать черезъ $u''_{x,y}$, $v''_{x,y}$ вторыя производныя отъ u и v по x и y,

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} = u'_x u'_y \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (u'_x v'_y + u'_y v'_x)\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} + v'_x v'_y \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial u} u''_{x,y} + \frac{\partial f}{\partial v} v''_{x,y}.$$

Очевидно, точно такъ же найдемъ всѣ вторыя частныя производныя по x, y или z сложной функціи w и затѣмъ, посредствомъ дифференцированія этихъ вторыхъ производныхъ по x, y, z третьи частныя производныя, и т. д.

Если бы независящія перемѣнныя фигурировали въ числѣ перемѣнныхъ, отъ которыхъ явно зависитъ функція f, если бы, напр., имѣли $u = x$, или w дано было въ формѣ $f(x, v)$, то надо было бы различать,

по отношенію къ независимымъ перемѣннымъ, какъ къ случаѣ, гдѣ оно было только одно, съ одной стороны, *собственно частныя производныя*, получающіяся въ сложной функціи f отъ варіированія каждаго изъ этихъ перемѣнныхъ, x напр., только одного, не позволяя ему вводить въ свои измѣненія перемѣнныя сложной функціи, которыя, какъ v, зависятъ отъ него, а съ другой стороны *собственно полныя производныя*, которыя надо было бы обозначать посредствомъ значка c, выражая ихъ, напр., черезъ $\frac{\partial_c f}{\partial x}$ или $\frac{\partial_c f}{\partial y}, \cdots$ и которыя получились бы въ f отъ варіированія *вмѣстѣ съ x всего того, что зависитъ отъ x* (какъ v) или *съ y всего того, что зависитъ отъ y*, и т. д. Такимъ образомъ функція формы $f(x, y, v)$ дала бы

$$\frac{\partial_c f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + v'_x \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial_c f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + v'_y \frac{\partial f}{\partial v}.$$

66. — Дифференцированіе неявныхъ функцій нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Пусть, напр., дана сложная функція $F(x, y, z)$, въ которой предполагаютъ, для ясности, что z выражаетъ ординату поверхности, зависящую опредѣленнымъ способомъ отъ двухъ горизонтальныхъ координатъ x и y. Можно въ этомъ случаѣ, чтобы сократить писаніе, представить черезъ

p, q — двѣ первыхъ частныхъ производныхъ z'_x, z'_y или $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

и черезъ

r, s, t — три вторыхъ частныхъ производныхъ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$,

изъ которыхъ первая и третья иногда называются *прямыми* вторыми производными въ противоположность второй $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, которая получаетъ тогда названіе *облической второй производной*.

Очевидно, для дифференцированія по отношенію къ x или y функціи F и ея частныхъ производныхъ, которыя всѣ будутъ новыми явными функціями x'а, y'а и z'а, будемъ имѣть двѣ символическія формулы

$$(8) \qquad \frac{\partial_c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial_c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial_c}{\partial z}.$$

Замѣчая, что p и q или z'_x и z'_y зависятъ, какъ z, только отъ x и y и имѣютъ для частныхъ производныхъ съ одной стороны r и s

по отношенію къ x, а съ другой, s и t по отношенію къ y, послѣдовательно получимъ:

$$
(9)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial_c F}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\, p, \quad \dfrac{\partial_c F}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\, q; \\
\dfrac{\partial_c^2 F}{\partial x^2} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + p\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\left(\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\, p\right) = \\
\qquad = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2p\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z} + p^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\, r \\
\dfrac{\partial_c^2 F}{\partial x\,\partial y} = \left(\dfrac{\partial}{\partial y} + q\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\left(\dfrac{\partial F}{\partial x} + p\dfrac{\partial F}{\partial z}\right) = \\
\qquad = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + p\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\left(\dfrac{\partial F}{\partial y} + q\dfrac{\partial F}{\partial z}\right) = \\
\qquad = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + q\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z} + p\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z} + pq\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\, s \\
\dfrac{\partial_c^2 F}{\partial y^2} = \left(\dfrac{\partial}{\partial y} + q\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\left(\dfrac{\partial F}{\partial y} + q\dfrac{\partial F}{\partial z}\right) = \\
\qquad = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2q\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z} + q^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\, t. \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

Въ этихъ разложеніяхъ послѣдній членъ, именно тотъ, который будетъ содержать наиболѣе возвышенную производную z'а, будетъ выводиться изъ члена $\dfrac{\partial F}{\partial z} p$ или $\dfrac{\partial F}{\partial z} q$ одной изъ двухъ первыхъ производныхъ, для чего надо дифференцировать каждый разъ второй множитель p или q, а не первый $\dfrac{\partial F}{\partial z}$; вслѣдствіе этого, съ одной стороны, *эта наивысшая частная производная* z'а, *фигурирующая въ уравненіи, будетъ въ первой степени*, а съ другой она будетъ имѣть для коэффиціента $\dfrac{\partial F}{\partial z}$. Она будетъ показывать кромѣ того число дифференцированій z'а по отношенію къ x или y, произведенныхъ надъ самой функціей F.

Теперь допустимъ, что z долженъ варіировать съ x и y такимъ образомъ, что функція F остается постоянной. Иначе говоря, предположимъ, что z есть неявная функція x'а и y'а, опредѣленная уравненіемъ $F(x, y, z) = c$. Всѣ полныя производныя F'а по отношенію къ x или къ y будутъ нули, и поэтому будемъ имѣть, чтобы опредѣлить p и q, два уравненія 1-ой степени, получающіяся отъ уничтоженія послѣднихъ частей двухъ первыхъ формулъ (9), гдѣ отдѣльно фигурируютъ p и q, затѣмъ, чтобы получить r, s, t, будемъ имѣть уравненія той же

степени, рѣшающіяся опять каждое отдѣльно и дѣлающіяся изъ послѣднихъ частей трехъ слѣдующихъ формулъ (9), приравниваемыхъ къ нулю, и т. д.

Первыя производныя p и q, затѣмъ вторыя производныя r, s, t въ выраженіяхъ, гдѣ замѣнимъ p и q черезъ ихъ уже найденныя значенія и т. д., будутъ выражаться раціонально черезъ послѣдовательныя частныя производныя, все болѣе и болѣе возвышающагося порядка, функціи $F(x, y, z)$. Если же она напр. есть многочленъ, какъ это бываетъ, когда дѣло идетъ объ алгебраической поверхности, уравненіе которой было взято въ цѣлой формѣ, то p, q, r, s, t,... получаются поэтому въ видѣ раціональныхъ функцій координатъ x, y, z разсматриваемой точки поверхности. Первыя производныя p и q, отъ z по x и y равняются, въ частности, двумъ соотвѣтствующимъ частнымъ $-\frac{\partial F}{\partial x}$ и $-\frac{\partial F}{\partial y}$ на $\frac{\partial F}{\partial z}$, какъ это уже было узнано способомъ, скорѣе геометрическимъ, въ предпослѣдней главѣ (часть II).

Такимъ образомъ къ послѣдовательнымъ частнымъ производнымъ неявныхъ функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ прилагаются свойства, которыя мы уже нашли у неявныхъ функцій одного только перемѣннаго. И легко будетъ узнать, поступая, какъ въ № 56 [стр. 104, формула (22)], что то же самое происходитъ и въ случаѣ нѣсколькихъ одновременныхъ неявныхъ функцій. Дифференцированіе по x и y, etc., повторенное какое-либо число разъ, каждаго изъ уравненій, опредѣляющихъ эти неявныя функціи (которыхъ столько, сколько и уравненій),— даетъ *всегда систему уравненій первой степени по отношенію къ неизвѣстнымъ аналогичнымъ производнымъ*, болѣе возвышеннымъ, чѣмъ фигурирующія здѣсь, этихъ различныхъ функцій; а каждое неизвѣстное имѣетъ во всѣхъ системахъ, для соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ, первыя производныя $\left(\text{какъ } \frac{\partial F}{\partial z}\right)$, по отношенію къ соотвѣтствующей неявной функціи, первыхъ частей разсматриваемыхъ уравненій.

Иногда возможны упрощенія, вытекающія изъ того, что извѣстныя частныя производныя первыхъ частей этихъ уравненій уничтожаются. Напр., для шара, уравненіе котораго есть $x^2+y^2+z^2=c$, будемъ имѣть, дифференцируя это уравненіе либо по отношенію къ x, либо къ y и дѣля на 2,

$$x+zp=0, \qquad y+zq=0, \tag{10}$$

результаты, первыя части которыхъ явно не содержатъ, первая y, вторая x. Новыя дифференцированія по x и y дадутъ просто

$$1+p^2+zr=0, \quad qp+zs=0, \quad pq+zs=0, \quad 1+q^2+zt=0, \tag{11}$$

и поэтому мы получимъ сначала изъ уравненій (10), а затѣмъ изъ уравненій (11)

$$(12)\qquad \begin{cases} p = -\dfrac{x}{z}, \qquad q = -\dfrac{y}{z}, \\ r = -\dfrac{x^2+z^2}{z^3}, \quad s = -\dfrac{xy}{z^3}, \quad t = -\dfrac{y^2+z^2}{z^3}, \end{cases}$$

раціональныя значенія, но которыя перестаютъ быть таковыми, если, желая ихъ сдѣлать явными по x и y, замѣнимъ въ нихъ z черезъ его выраженіе $\pm\sqrt{c-x^2-y^2}$, выводящееся изъ уравненія поверхности.

67. — Замѣны перемѣнныхъ.

Представимъ, что, если u есть извѣстная функція x'а, y, z, хотятъ замѣнить эти независимыя перемѣнныя другими ξ, η, ζ, связанными съ первыми посредствомъ уравненія формы

(13) $(x, y, z) =$ даннымъ функціямъ ξ'а, η, ζ.

Напр. x, y, z могутъ быть прямолинейными координатами различныхъ точекъ пространства, гдѣ существуетъ функція точки u; предлагаютъ замѣнить эти координаты другими, ξ, η, ζ, либо тоже прямолинейными, либо полярными, etc., которыя, не измѣняя значеній функціи въ различныхъ точкахъ, будутъ измѣнять самое выраженіе. Тогда слѣдуетъ поискать, какъ это мы дѣлали (стр. 105) въ случаѣ функцій одного только перемѣннаго, какимъ образомъ исчисляются, при помощи ξ, η, ζ, послѣдовательныя производныя отъ u по отношенію къ x, y, z.

Для этого употребимъ уже извѣстный способъ, который позволяетъ разсматривать функцію прежнихъ перемѣнныхъ x, y, z, какъ бы зависящую при посредствѣ ихъ отъ новыхъ перемѣнныхъ ξ, η, ζ, подобно функціямъ отъ функціи и даже, здѣсь, отъ сложныхъ функцій. Поэтому, заставляя, напр., варіировать x, а поэтому, и ξ, η, ζ, но не измѣняя ни y, ни z, мы будемъ имѣть:

$$(14)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Только, для того, чтобы вторая часть была новымъ значеніемъ, выраженнымъ черезъ ξ, η, ζ, прежней производной $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, остается замѣнить здѣсь производныя отъ ξ, η, ζ по x, которыя можно написать вмѣстѣ черезъ $\dfrac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x}$, значеніями, въ которыхъ фигурируютъ лишь сами ξ, η, ζ. Съ этой цѣлью продифференцируемъ по отношенію къ x, не заставляя

варіировать ни y, ни z, уравненія (13), называемыя *уравненіями* производимаго *трансформированія*. Иначе говоря, заставимъ варіировать ξ, η, ζ такимъ образомъ, чтобы одновременныя увеличенія, dx, dy, dz, x'а, y, z, раздѣленныя на dx, давали, какъ частныя, 1, 0, 0. Очевидно, получится, беря эти частныя для вторыхъ частей и обозначая черезъ x, y, z тѣ же самыя функціи ξ'а, η, ζ, которыя выражаютъ эти прежнія перемѣнныя,

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial \zeta}\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}=1. \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}+\dfrac{\partial y}{\partial \zeta}\dfrac{\partial \zeta}{\partial y}=0. \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial z}+\dfrac{\partial z}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial z}+\dfrac{\partial z}{\partial \zeta}\dfrac{\partial \zeta}{\partial z}=0. \end{cases}$$

Это, по отношенію къ искомымъ производнымъ $\dfrac{\partial(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{\partial x}$ суть уравненія первой степени, коэффиціенты которыхъ, первыя частныя производныя функцій ξ'а, η, ζ, называющихся черезъ x, y, z, справедливо и единственно содержатъ новыя перемѣнныя: поэтому рѣшеніе этой системы дастъ требуемыя значенія $\dfrac{\partial(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{\partial x}$.

Я выражу результаты довольно простымъ способомъ, называя черезъ K *детерминантъ трансформированія* или общій знаменатель,

$$(16)\quad K=\frac{\partial x}{\partial \xi}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)+\frac{\partial y}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \zeta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)+\frac{\partial z}{\partial \xi}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta}-\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right),$$

детерминантъ, взятый здѣсь по отношенію къ его элементамъ $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial \xi}$, но могущій быть приложенъ также и по отношенію къ $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial \eta}$ или $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial \zeta}$. Онъ во всѣхъ членахъ входитъ въ первой степени по отношенію къ каждой изъ этихъ серій элементовъ, вслѣдствіе чего, если разсматривать всѣ элементы $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}$, какъ столько же различныхъ перемѣнныхъ, то коэффиціенты въ скобкахъ, изъ которыхъ вынесены въ (16) $\dfrac{\partial x}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \xi}$, будутъ ни чѣмъ инымъ, какъ его первыми частными производными по отношенію къ этимъ элементамъ, производными, не зависящими отъ этихъ послѣднихъ; и будемъ имѣть:

$$(16\text{ bis})\qquad K=\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial x}{\partial \xi}}+\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial y}{\partial \xi}}+\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial z}{\partial \xi}}.$$

Но выраженіе неизвѣстнаго, напр. $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, имѣетъ знаменателемъ K, а для числителя какъ извѣстно, то, чѣмъ дѣлается K, когда замѣняютъ коэффиціенты $\frac{\partial x}{\partial\xi}, \frac{\partial y}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\xi}$ этого неизвѣстнаго, въ уравненіяхъ (15), соотвѣтствующими извѣстными вторыми частями, 1, 0, 0, этихъ уравненій, т.-е. когда во второй части (16) или (16 bis) подставляютъ соотвѣтственно 1, 0, 0 на мѣсто первыхъ множителей $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial\xi}$. Прилагая въ концѣ концовъ къ полученной формулѣ то, что будетъ найдено точно такъ же и для прочихъ искомыхъ производныхъ $\frac{\partial(\eta, \zeta)}{\partial x}$, мы получимъ

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial x}{\partial\xi}}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial x}{\partial\eta}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial x}{\partial\zeta}}.$$

Благодаря этимъ значеніямъ вторая часть уравненія (14) зависитъ уже исключительно только отъ ξ, η, ζ; и формула трансформированія, которую требовалось найти, будетъ:

$$(17) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{K}\left(\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial x}{\partial\xi}}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial x}{\partial\eta}}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial x}{\partial\zeta}}\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right).$$

Мы докажемъ, что она прилагается ко всякой функціи x'а, y, z или ξ'а, η, ζ, если увичтожить здѣсь букву u; а это дѣлаетъ ее символической формулой въ родѣ тѣхъ, которыя часто встрѣчались въ предыдущей главѣ, т.-е. способной выражать извѣстный способъ дѣйствія надъ функціей, которую пишутъ за каждой частью или каждымъ членомъ. А такъ какъ, чтобы дифференцировать по y или по z, будемъ имѣть, очевидно, другія аналогіи, въ которыхъ будутъ фигурировать производныя детерминанта K и онъ самъ уже не по отношенію къ элементамъ $\frac{\partial x}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}$, но по отношенію къ $\frac{\partial y}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}$ или къ $\frac{\partial z}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}$, то въ окончательномъ видѣ получится для производства разсматриваемаго трансформированія кратная формула

$$(18) \qquad \frac{\partial}{\partial(x, y, z)}=\frac{1}{K}\left[\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial(x, y, z)}{\partial\xi}}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial(x, y, z)}{\partial\eta}}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial(x, y, z)}{\partial\zeta}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right],$$

гдѣ всѣ скобки (x, y, z) должны, въ каждомъ нужномъ приложеніи, быть замѣнены либо первой изъ буквъ, которыя онѣ содержатъ, либо второй, etc.

Остается сказать, что всякій разъ, какъ первыя производныя по x, y, z разсматриваемыхъ функцій u, v, w... выражаются такимъ образомъ черезъ ξ, η, ζ, это будутъ новыя функціи ξ'а, η, ζ; а ихъ собственное дифференцированіе по x, y, z будетъ производиться, слѣдовательно, посредствомъ символическихъ формулъ (18), такъ что, въ случаѣ одного только независимаго перемѣннаго, два послѣдовательныхъ примѣненія формулы (38) послѣдней главы [стр. 106] даютъ вторую производную по x. Постепенно получатся въ видѣ функціи ξ'а, η, ζ, все по тому же самому пріему, частныя производныя всѣхъ порядковъ функцій $u, v, w,$... по отношенію къ прежнимъ перемѣннымъ x, y, z. И вопросъ будетъ рѣшенъ.

Если же хотятъ замѣнить не только независимыя перемѣнныя, но хотятъ замѣнить и самыя функціи u, v, w,.. другими U, V, W,..., связанными съ ними и съ ξ, η, ζ извѣстными уравненіями, то, очевидно, достаточно для этого поставить вмѣсто u, v, w,... ихъ значенія по ξ, η, ζ, U, V, W, etc. во-вторыхъ частяхъ соотношенія (17) и во всѣхъ прочихъ подобныхъ соотношеніяхъ.

68. — Примѣръ: случай, когда замѣняются не всѣ независящія перемѣнныя.

Приложимъ эту теорію къ примѣру, взятому изъ гидродинамики. Предположимъ, что x, y, z суть координаты, въ эпоху t, различныхъ частицъ извѣстной движущейся жидкой массы, отнесенной къ системѣ опредѣленныхъ прямоугольныхъ осей, и что ξ, η, ζ означаютъ координаты этихъ самыхъ частицъ въ извѣстномъ специальномъ состояніи жидкости, будь оно дѣйствительное или только фиктивное, состояніи, которое принимаютъ за точку отправленія или членъ сравненія. Ясно, что *теперешнія* координаты x, y, z суть извѣстныя функціи, не только t'а, но также (какъ измѣняющіяся съ частицей) и координатъ, называемыхъ *первоначальными*, ξ, η, ζ; это не помѣшаетъ разсматривать x, y, z, какъ независимыя перемѣнныя, потому что явленія, происходящія въ эпоху t въ различныхъ частяхъ (x, y, z) пространства, занятаго жидкостью, очевидно, выражаются функціями точки, гдѣ фигурируютъ теперешнія координаты x, y, z. Такимъ образомъ уравненія (13) трансформированія будутъ содержать здѣсь t въ своихъ вторыхъ частяхъ, и кромѣ того ξ, η, ζ. Теперешнее состояніе движенія жидкости опредѣляется тремя производными $\frac{d(x, y, z)}{dt}$, которыя, въ точкѣ (x, y, z), суть три *скорости* жидкости въ направленіяхъ осей и составляютъ три какія-либо функціи ξ'а, η, ζ, t или x'а, y, z, t; ихъ обозначаютъ для сокращенія черезъ u, v, w; надо доказать напр., что если назвать при этомъ черезъ ρ плотность частицы, расположенной въ данную минуту

въ (x, y, z), то производная отъ $-\lg\varrho$, взятая по отношенію къ времени, слѣдуя за этой частицей или безъ варіированія ξ, η, ζ, имѣетъ для своего значенія

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{19}$$

Посмотримъ теперь, чѣмъ сдѣлается это значеніе, когда его выразятъ въ видѣ функціи ξ'а, η, ζ. Употребленіе формулъ (18) измѣняетъ его сначала въ

$$\frac{1}{K}\left[\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial x}{\partial\xi}}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial x}{\partial\eta}}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial x}{\partial\zeta}}\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{\partial K}{\partial\frac{\partial y}{\partial\xi}}\frac{\partial v}{\partial\xi}+\cdots\right]$$

Но, такъ какъ u, v, w обозначаютъ три производныя $\frac{d(x, y, z)}{dt}$, взятыя безъ варіированія ξ, η, ζ, то количество, заключенное въ скобкахъ, есть сумма произведеній, получающихся отъ умноженія каждой первой частной производной детерминанта K, отнесенной къ одному какому-либо изъ тѣхъ девяти элементовъ, отъ которыхъ этотъ детерминантъ зависитъ, — на такую же производную, по t, этого элемента; или, иначе говоря, это количество есть полная производная K'а по отношенію ко времени, получающаяся безъ варіированія ξ, η, ζ. Такимъ образомъ, выраженіе (19) дѣлается просто $\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial t}$ или $\frac{\partial \lg K}{\partial t}$ при системѣ перемѣнныхъ ξ, η, ζ, t; а такъ какъ оно выражаетъ величину производной $\frac{\partial \lg\varrho}{\partial t}$, разсматриваемой при этой же системѣ перемѣнныхъ, то можно видѣть, что функція $\lg K+\lg\varrho$, или $\lg(K\varrho)$, взятая въ различныя эпохи t, но для одной и той же частицы, первоначально расположенной въ (ξ, η, ζ), имѣетъ свою производную всегда нулемъ. Эта функція, слѣдовательно, независима отъ времени; вслѣдствіе того же K и ϱ варіируютъ въ обратномъ отношеніи другъ къ другу отъ одного мгновенія до другого. Такимъ образомъ детерминантъ K, опредѣленный (16), представляетъ пропорціонально, въ разныя эпохи и для одной и той же частицы, обратное плотности этой частицы. Это можно было бы узнать и иначе, но здѣсь достаточно было доказать, какъ примѣръ упрощеній, могущихъ произойти отъ замѣны перемѣнныхъ, — что подстановка ξ, η, ζ на мѣсто x, y, z приводитъ выраженіе (19) къ виду $\frac{\partial \lg K}{\partial t}$.

Взятый вопросъ, какъ бóльшая часть физическихъ примѣненій анализа, содержитъ четыре независящихъ перемѣнныхъ, именно ξ, η, ζ, t при системѣ одной и x, y, z, t при другой. Если *три* уравненія (18) трансформированія производныхъ удовлетворяютъ насъ, то это потому

только, что одно изъ перемѣнныхъ, t, — общее обѣимъ системамъ, а также и потому, что мы можемъ разсматривать производныя по отношенію къ этому общему перемѣнному только въ новой системѣ, гдѣ производныя по t берутся безъ варіированія ξ, η, ζ. Если бы мы начали разсматривать ихъ точно такъ же и при системѣ x, y, z, t, гдѣ онѣ берутся безъ варіированія x, y, z, а также и ξ, η, ζ, то намъ пришлось бы, чтобы избѣжать смѣшиванія этихъ производныхъ съ предыдущими, — придавать перемѣнному t два различныхъ названія, называть его напр. черезъ τ, когда оно фигурируетъ рядомъ съ ξ, η, ζ, и черезъ t, когда оно соединено съ x, y, z. Тогда совокупность уравненій трансформированія будетъ устанавливаться очевиднымъ соотношеніемъ $t = \tau$, присоединеннымъ къ соотношеніямъ (13), сдѣлавшимся

$$(x, y, z) = \text{функціямъ } \xi\text{'a}, \eta, \zeta, \tau.$$

Производныя, обозначаемыя выше черезъ $\frac{d}{dt}$ или $\frac{\partial}{\partial t}$, слѣдовательно, будутъ писаться черезъ $\frac{d}{d\tau}$ или $\frac{\partial}{\partial\tau}$, а обозначеніе $\frac{\partial}{\partial t}$ будетъ выражать только производныя, взятыя *на мѣстѣ*, т.-е. безъ варіированія *теперешнихъ* координатъ x, y, z, или что при этомъ послѣдовательныя производныя функціи точки разсматриваются на одномъ и томъ же мѣстѣ (x, y, z). Что касается до производныхъ $\frac{d}{d\tau}$, получающихся, напротивъ, безъ варіированія ξ, η, ζ, или безъ того, чтобы первоначальныя координаты разсматриваемой точки измѣнялись и, слѣдовательно, слѣдовали за одной и той же частицей, — то онѣ будутъ, сравнительно, *полными* производными по отношенію ко времени, вычисленными при увеличеніи вмѣстѣ t, x, y, z соотвѣтственно на $dt = d\tau$, $dx = u d\tau$, $dy = v d\tau$, $dz = w d\tau$; а это даетъ

$$\frac{d}{d\tau} \text{ или } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}.$$

ГЛАВА VII.

Аналитическія примѣненія дифференціальнаго исчисленія: исключеніе постоянныхъ и произвольныхъ функцій посредствомъ дифференцированія; *разсмотрѣніе однородныхъ функцій; теорема Коши объ отношеніи одновременныхъ увеличеній двухъ функцій и употребленіе этой теоремы, особенно при исчисленіи выраженій неопредѣленной формы; разложеніе функцій въ цѣлыя серіи; формулы Тэйлора. Макъ-Лорэна; разложеніе $(a+b)^m$ etc.

77. — Исключеніе произвольныхъ постоянныхъ посредствомъ дифференцированія и образованіе дифференціальнаго уравненія, подходящаго ко всей группѣ функцій или кривыхъ.

Предшествующія главы содержали всѣ главныя правила дифференціальнаго исчисленія; остальное этого исчисленія заключается въ *примѣненіяхъ* метода, которыя называются *аналитическими* или *геометрическими*, смотря по тому, вводятъ ли они преимущественно алгебру или геометрію, но которыя, во всякомъ случаѣ, получаютъ геометрическое представленіе, необходимое для полнаго ознакомленія съ ними. Я начну съ аналитическихъ примѣненій, и сначала съ того изъ нихъ, которое будетъ, въ нѣкоторомъ родѣ, переходомъ отъ самыхъ правилъ Анализа безконечно-малыхъ къ его примѣненіямъ: это — *исключеніе* постоянныхъ *посредствомъ дифференцированія* и образованіе *уравненій, дифференціальныхъ* или *имѣющихъ частныя производныя,* общихъ всей группѣ функцій.

Пусть безконечность функцій y x'а будетъ опредѣляема однимъ и тѣмъ же уравненіемъ формы $\varphi(x, y) = c$, гдѣ c означаетъ параметръ, мѣняющійся безпрерывно, когда переходятъ отъ одной изъ этихъ функцій къ ея сосѣднимъ; напр. $c = \varphi(x, y)$ будетъ опредѣлять въ плоскости xy функцію точки, а разсматриваемыя функціи y x'а будутъ опредѣлять, по соотношенію, существующему между ординатой ихъ и абсциссой, различныя кривыя, на которыхъ $\varphi(x, y)$ остается неперемѣнной. Тогда всѣ функціи y x'а или кривыя, ихъ представляющія, называются при-

надлежащими одной и той же *группѣ*, которую онѣ составляютъ своею совокупностью. Уравненіе $\varphi(x, y) = c$, дифференцированное вдоль этихъ кривыхъ, даетъ, очевидно $\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' = 0$, соотношеніе, откуда постоянное c исчезло, но гдѣ фигурируетъ, кромѣ x и y, производная y'. Это соотношеніе называется *дифференціальнымъ уравненіемъ* данной группы функцій или кривыхъ: оно опредѣляетъ, въ видѣ функціи координатъ x, y каждой точки плоскости, отклоненіе y', которое представляетъ проходящая здѣсь одна изъ кривыхъ группы; точно такъ же оно выражаетъ свойство, общее всѣмъ даннымъ функціямъ y, такъ какъ, уничтожая c, мы заставляемъ уничтожиться то, что отличаетъ однѣ функціи отъ другихъ.

Мы увидимъ въ интегральномъ исчисленіи, что уравненіе группы, взятое или въ формѣ $\varphi(x, y) = c$, или во всякой другой, но обязательно въ явной формѣ по отношенію къ y, такъ напр. $y = f(x, c)$, называется *общимъ интеграломъ* дифференціальнаго уравненія. Напр. дифференціальное уравненіе $y' = ay$ характеризуетъ группу функцій, формула которыхъ есть $y + ce^{ax}$, такъ какъ, если принять при одномъ мгновеніи, что c при этой группѣ обозначаетъ не постоянное уже, а какую-либо функцію x'а, вслѣдствіе чего, произведеніе ce^{ax} можетъ само выражать какую угодно функцію x'а, — то производная y' этого произведенія будетъ, очевидно, $c'e^{ax} + ace^{ax}$ и получится, какъ условіе, при которомъ эта производная обращается въ ay или ace^{ax}, то, что $c' = 0$, т.-е. что c = постоянному. Дѣйствительно, уравненіе $y = ce^{ax}$ съ постояннымъ c, взятое въ формѣ $ye^{-ax} = c$, даетъ, если уничтожить, послѣ диффенцированія, общій множитель e^{-ax} (отличающійся отъ нуля), $y' - ay = 0$.

Такимъ образомъ дифференцированія достаточно для уничтоженія c, когда уравненіе, откуда уничтожаютъ его, рѣшено по отношенію къ этому постоянному или, по крайней мѣрѣ, когда c *отдѣлено* отъ x и y, т.-е. когда члены, гдѣ содержится c, не содержатъ ни x, ни y. Но этого уже нѣтъ въ обратномъ случаѣ, когда разсматриваемое уравненіе — формы $F(x, y, c) = 0$ и когда c входитъ въ соотношеніе $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$.

Но дифференцированіе, доставляя это соотношеніе, даетъ еще возможность получить, между x, y и y', дифференціальное уравненіе группы, такъ какъ, чтобы имѣть его, достаточно уничтожить c, получая, напр., его значенія изъ разсматриваемаго $F(x, y, c) = 0$ для подстановки его въ $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$.

Полезно замѣтить, что дифференціальное уравненіе существуетъ даже и тогда, когда группа функцій y не можетъ быть выражена алгебраически или аналитически и, слѣдовательно, не позволяетъ уничтоженій, которымъ учитъ алгебра. Эта группа можетъ быть опредѣляема

только эмпирическимъ путемъ: такъ представляютъ напр. совокупность линій или полосъ, покрывающихъ всю плоскую поверхность, на которой будетъ проходить, скользя по поверхности, безконечность малыхъ твердыхъ тѣлъ. Въ каждой точкѣ (x, y) такой плоскости будетъ такимъ образомъ ясно замѣчаться или опредѣляться направленіе полосы, а это позволяетъ сказать, что угловой коэффиціентъ y' касательной къ группѣ, образуемой этими кривыми, будетъ равняться опредѣленной, правда, чисто эмпирической, функціи двухъ координатъ x, y точки касанія, и что, слѣдовательно, кривыя допустятъ извѣстное общее дифференціальное уравненіе.

Точно такъ же ихъ ординаты y могутъ не быть выражаемы символомъ $f(x, c)$. Такъ какъ можно было бы различать различныя кривыя посредствомъ нумера положительнаго или отрицательнаго порядка, написаннаго при каждой изъ нихъ, то послѣдовательные нумера...., —3, —2, 1, 0, 1, 2, 3,... соотвѣтствовали бы кривымъ довольно сосѣднимъ другъ съ другомъ, а дробные нумера, такъ же произвольно мало разнящіеся другъ отъ друга, были бы сохраняемы для кривыхъ, проведенныхъ между первыми; вслѣдствіе этого нумеръ порядка кривыхъ сдѣлался бы независящимъ перемѣннымъ, безпрерывнымъ *параметромъ* c. Этотъ видъ постепенности былъ бы, кромѣ того, произвольнымъ въ предѣлахъ, сходныхъ съ безпрерывностью; и мы имѣли бы свободу производить эту постепенность при всякомъ *количественномъ* обстоятельствѣ, дающемся кривыми. За c можно брать напр. *ординату начала* различныхъ кривыхъ, т.-е. разстояніе до начала координатъ отъ точки, гдѣ онѣ пересѣкаютъ ось y-овъ, и т. д. Ясно, что y, варіирующій отъ одной абсциссы до другой и отъ одной кривой до другой, будетъ вполнѣ *извѣстной* функціей f (только эмпирической) x'а и c. И, точно такъ же, c, нумеръ порядка или параметръ кривой, проходящей черезъ данную точку (x, y), будетъ вполнѣ опредѣленъ, какъ только дадутъ x и y, или будетъ вполнѣ *извѣстной* функціей точки, $\varphi(x, y)$, но опять-таки эмпирической.

Если бы данное уравненіе между x и y содержало нѣсколько параметровъ и представляло такимъ образомъ то, что можно назвать кратной безконечностью функцій y x'а (именно, различную безконечность при каждомъ параметрѣ, который заставляютъ варіировать), то это уравненіе надо было бы дифференцировать столько разъ, сколько имѣли бы этихъ параметровъ, вводя такимъ образомъ кромѣ первой производной y' слѣдующія производныя y'', y''',... вплоть до той, порядокъ которой равнялся бы числу параметровъ; и исключеніе постоянныхъ изъ соотношеній, получающихся такимъ образомъ, и разсматриваемаго дало бы, по отношенію къ $x, y, y', y'', y''', \ldots$, то, что называютъ дифференціальнымъ уравненіемъ *высшаго порядка*, т.-е. содержащимъ производныя, высшія, чѣмъ первая. Это уравненіе, очевидно, выражало бы свойство, общее кратной безконечности функцій, о которыхъ идетъ дѣло.

Еще можетъ случиться, что получатся нѣсколько функцій y, z, u,...x'а и, напр., равное число параметровъ, входящихъ, каждый, въ выраженіе всѣхъ функцій. Тогда производная y'а напр. зависѣла бы вообще отъ всѣхъ этихъ параметровъ, и, подставляя здѣсь ихъ значенія (по x, y, z, u,...), выведенныя изъ данныхъ уравненій, которыя опредѣляютъ функціи y, z, u,..., мы получили бы соотношеніе между производной y' и x, y, z, u,... Такъ какъ получается одна аналогія для z', другая для u', etc., то окончательно, вслѣдствіе соединенія всѣхъ этихъ соотношеній между y', z', u',... и x, y, z, u,..., можно имѣть то, что называютъ *системой дифференціальныхъ уравненій;* эти *одновременныя* уравненія, не содержащія уже параметровъ, выражаютъ извѣстную совокупность свойствъ, общихъ кратной безконечности функцій y, z, u,...

78. — Примѣры: свойство касательныхъ или нормалей, общее всей группѣ кривыхъ.

Въ простомъ случаѣ соотношенія, $F(x, y, c) = 0$, между прямоугольными координатами x и y различныхъ точекъ группы плоскостныхъ кривыхъ дифференціальное, уравненіе формы $f(x, y, y') = 0$, къ которому приходятъ, заставляетъ отклоненіе y' касательной, проходящей въ этой точкѣ къ кривой, которая здѣсь проходитъ, и слѣдовательно отклоненіе соотвѣтствующаго перпендикуляра — зависить отъ положенія (x, y) каждой точки плоскости. Итакъ это уравненіе выражаетъ главное свойство касательной или нормали въ группѣ кривыхъ, и можно понять, что оно имѣетъ иногда легкое геометрическое представленіе, гдѣ будутъ фигурировать напр. или длина *касательной* или *нормали*, предполагаемыхъ проходящими отъ точки контакта (x, y) до оси абсциссъ, или ихъ проекціи на эту ось, называемыя соотвѣтственно *подкасательной* и *поднормалью*, etc. Выраженія, необходимыя знать для такого представленія, этихъ двухъ послѣднихъ линій TP, NP, относящихся (fig. 12) къ какой-либо точкѣ M кривой MM', получаются легко. Если провести, въ M, касательную tMT и нормаль MN, то отклоненіе, $y' = \operatorname{tg} x'MT$, касательной есть не что иное, по опредѣленію, какъ отношеніе $\frac{MP}{TP}$ или $\frac{y}{TP}$, равное отношенію $\frac{PN}{MP}$ или $\frac{PN}{y}$ вслѣдствіе свойства, по которому высота $MP = y$ прямоугольнаго треугольника TMN, опущенная на гипо-

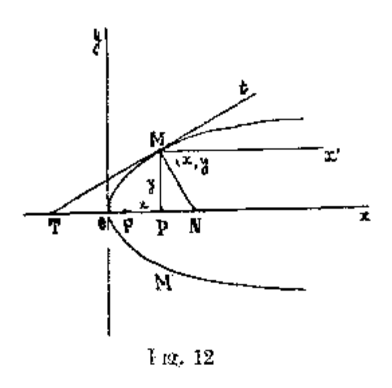


Fig. 12

тенузу TN, есть среднее пропорціональное между отрѣзками гипотенузы. Такимъ образомъ имѣемъ

$$\text{поднормаль } PN = yy' \text{ и подкасательная } TP = \frac{y}{y'} \cdot$$

Вотъ два примѣра:

1) Разсмотримъ группу кривыхъ $y^2 = 2cx$, образуемую всѣми параболами, какъ напр. $M'OM$, которыя имѣютъ свою вершину въ началѣ координатъ и свой фокусъ F на оси x'овъ, параболами, изъ которыхъ одна всегда пройдетъ черезъ какую-либо точку $M(x, y)$ плоскости. Уравненіе $y^2 = 2cx$, дифференцированное по x и раздѣленное на 2, даетъ $yy' = c$, т.-е. (по формулѣ, которую мы недавно получили) $PN = c$, извѣстное свойство поднормали. Исключимъ c, вставляя, напр., его значеніе yy' въ уравненіе $\frac{y^2}{c} = 2x$ группы. Получится для искомаго дифференціальнаго уравненія

$$\frac{y}{y'} = 2x, \quad \text{т.-е.} \quad TP = 2OP.$$

Итакъ общее свойство всѣхъ параболъ данной группы состоитъ въ томъ, что ихъ подкасательная TP и, слѣдовательно, ихъ касательная TM пересѣкаются въ своей срединѣ осью ординатъ y, которая есть касательная къ вершинѣ этихъ параболъ.

2) Какъ второй примѣръ, пусть дана группа круговъ одного и того же радіуса R, центры которыхъ лежатъ на оси x'овъ. Ихъ уравненіе, если взять за параметръ c абсциссу центра, есть

$$(x - c)^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Дифференцированіе даетъ, если раздѣлить на 2, $x - c + yy' = 0$ и наконецъ черезъ исключеніе c или лучше $x - c$ получается

$$y^2 y'^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Таково — искомое дифференціальное уравненіе. Но согласно доказательству, для котораго служила предыдущая фигура, но которое можетъ быть приложено ко всякой кривой, yy' выражаетъ поднормаль PN, относящуюся къ точкѣ M, ордината которой есть $MP = y$, и, слѣдовательно, выраженіе $y^2y'^2 + y^2$ не что иное, какъ $\overline{PN}^2 + \overline{MP}^2$, сумма, равная квадрату, MN^2, нормали въ прямоугольномъ треугольникѣ MPN. Итакъ дифференціальное уравненіе настоящей задачи заставляетъ писать $MN^2 = R^2$ или $MN = R$; оно означаетъ, что разсматриваемые круги допускаютъ для общаго свойства слѣдующее: всѣ ихъ нормали одной и той же длины и равны постоянному радіусу этихъ круговъ.

79. — Исключеніе произвольныхъ функцій посредствомъ дифференцированія; образованіе уравненій, имѣющихъ частныя производныя и выражающихъ свойство касательной плоскости, общее всему классу поверхностей, содержащему безконечность группъ, или свойство всего класса функцій нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Когда разсматриваемая функція, которую я назову черезъ u, зависитъ отъ нѣсколькихъ параметровъ и отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y,..., то уравненіе, которое опредѣляетъ ее, можетъ быть дифференцировано по отношенію къ каждому изъ нихъ и даетъ такимъ образомъ происхожденіе столькимъ уравненіямъ, содержащимъ соотвѣтственно производныя $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$,..., сколько существуетъ этихъ перемѣнныхъ x, y,... Имѣя такимъ образомъ уравненій болѣе, чѣмъ въ случаѣ только одного независимаго перемѣннаго, можно производить гораздо болѣе общія исключенія и избавляться не только отъ параметра, но даже, какъ я укажу скоро на примѣрѣ, и отъ произвольной функціи.

Итакъ тогда, между перемѣнными x, y,..., u и ихъ частными производными $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$,... составляютъ уравненіе, называемое *имѣющимъ частныя производныя* и общее тому, что можно назвать всѣмъ *классомъ* функцій, категоріей, болѣе широкой, чѣмъ *группы* съ однимъ или нѣсколькими параметрами, только что разсмотрѣнныя; оно называется такъ потому, что содержитъ безконечное разнообразіе этихъ группъ. Когда, въ частности, имѣютъ два независимыхъ перемѣнныхъ x, y, и когда u есть ордината класса поверхностей, то ихъ двѣ производныя по x и y, названныя черезъ p и q въ четвертой главѣ (стр. 88) опредѣляютъ (стр. 89) направленіе касательной плоскости или направленіе нормали: а слѣдовательно, уравненіе, имѣющее частныя производныя, между x, y и p и q, общее всѣмъ разсматриваемымъ поверхностямъ, выражаетъ свойство ихъ касательной плоскости или ихъ нормали.

Подобно тому, что было въ случаѣ функціи y x'а и двухъ, трехъ... параметровъ, гдѣ равное число дифференцированій по x позволяетъ исключать эти параметры и приводитъ къ дифференціальному уравненію высшаго порядка, — точно такъ же когда выраженіе данной функціи x'а, y... содержитъ болѣе одной произвольной функціи, дифференцированія, продолженныя вплоть до производныхъ второго, третьяго и т. д. порядка, дѣлаютъ возможнымъ исключеніе этихъ произвольныхъ функцій и образованіе того, что зовутъ *уравненіемъ, имѣющимъ частныя производныя высшаго порядка*.

82. — Другое аналитическое примѣненіе дифференціальнаго исчисленія: истинныя значенія выраженій неопредѣленной формы.

Перейдемъ къ другой серіи аналитическихъ примѣненій дифференціальнаго исчисленія, именно къ вычисленію выраженій неопредѣленной формы.

Наиболѣе простыя изъ этихъ выраженій встрѣчаются при разсмотрѣніи частнаго $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ двухъ данныхъ функцій $f(x)$, $\varphi(x)$, когда, при извѣстномъ значеніи $x=a$ перемѣннаго, двѣ функціи въ одно и то же время уничтожаются. Частное дѣлается тогда $\frac{0}{0}$; а извѣстно, что это выраженіе способно принимать всѣ выражаемыя значенія, такъ какъ всѣ значенія, умноженныя на дѣлителя 0, дѣлаются дѣлимымъ — нулемъ. Но выраженіе, о которомъ идетъ дѣло, $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ не разсматривается только одно; оно должно (стр. 34) фигурировать въ ряду значеній функціи $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и, такъ какъ *естественно* (стр. 4) предполагать функціи *безпрерывными* всякій разъ, какъ нѣтъ къ этому абсолютной невозможности, то $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ можетъ получить также значеніе, не отличающееся замѣтнымъ образомъ отъ тѣхъ, которыя принимаетъ функція $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при приближеніи къ $x=a$, лишь бы только однако эти послѣднія значенія отличались все менѣе и менѣе другъ отъ друга. Иначе говоря, всякій разъ, какъ функція $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ будетъ стремиться къ предѣлу по мѣрѣ приближенія x къ a, — этотъ предѣлъ, *одинъ только,* будетъ истиннымъ значеніемъ дроби $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$; вотъ его-то, слѣдовательно, и надо искать.

Одинъ изъ непосредственныхъ учениковъ Лейбница, маркизъ де-Лопиталь (de L'Hôpital) далъ при томъ условіи, что производныя $f'(x)$, $\varphi'(x)$ безпрерывны при $x=a$, очень простое правило, вообще достаточное для этого. Оно состоитъ въ томъ, что при $x=a$ замѣняютъ отношеніе двухъ функцій $f(x)$, $\varphi(x)$ отношеніемъ ихъ производныхъ $f'(x)$, $\varphi'(x)$. Если бы случилось, что эти послѣднія сами уничтожаются при $x=a$, то надо было бы прилагать къ этому отношенію то же самое правило, послѣ уничтоженія въ $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ общихъ множителей, которые были бы здѣсь ясно обозначенными, и т. д....

Обыкновенно это правило выводятъ изъ теоремы Коши объ отношеніи одновременныхъ увеличеній двухъ функцій, составляющей важное обобщеніе основной формулы № 10 (стр. 31). Начнемъ съ ознакомленія съ этой теоремой.

83. — Теорема Коши объ отношеніи одновременныхъ увеличеній двухъ функцій.

Когда двѣ безпрерывныя функціи $f(x)$, $\varphi(x)$ имѣютъ свои первыя производныя $f'(x)$, $\varphi'(x)$ безпрерывными между двумя значеніями $x=a$, $x=a+h$ перемѣннаго и когда кромѣ того одна изъ этихъ функцій варіируетъ постоянно въ одномъ и томъ смыслѣ, такъ что ея производная, могущая уничтожиться при предѣлахъ, не уничтожается въ этомъ интервалѣ,— то отношеніе соотвѣтствующихъ суммированныхъ увеличеній двухъ функцій равно отношенію ихъ производныхъ при промежуточномъ значеніи перемѣннаго.

Въ другихъ словахъ, если Θh обозначаетъ неизвѣстную дробь h'а, или Θ есть число, взятое между 0 и 1, то будемъ имѣть

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+\Theta h)}{\varphi'(a+\Theta h)}. \tag{11}$$

Вставимъ въ самомъ дѣлѣ между a и $a+h$ неопредѣленно возрастающее число значеній x'а, которыя я назову черезъ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, сохраняя обозначенія x_0 и x_n для перваго a и для послѣдняго $a+h$. Отъ одного изъ этихъ значеній до другого $f(x)$ и $\varphi(x)$ получаютъ увеличенія, имѣющія общія выраженія $\Delta f(x)$, $\Delta\varphi(x)$; соотвѣтствующія отношенія этихъ увеличеній, имѣющія знаменателями $\Delta\varphi(x)$ съ однимъ и тѣмъ же знакомъ, по условію, будутъ

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta\varphi(x_0)},\ \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta\varphi(x_1)},\ \frac{\Delta f(x_2)}{\Delta\varphi(x_2)},\ldots\frac{\Delta f(x_{n-1})}{\Delta\varphi(x_{n-1})}. \tag{12}$$

Поэтому отношеніе

$$\frac{\Delta f(x_0)+\Delta f(x_1)+\ldots+\Delta f(x_{n-1})}{\Delta\varphi(x_0)+\Delta\varphi(x_1)+\ldots+\Delta\varphi(x_{n-1})} \quad \text{или} \quad \frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)},$$

образованное отъ сложенія почленно предыдущихъ, будетъ заключаться, по теоремѣ (стр. 11), между самымъ большимъ и самымъ малымъ изъ нихъ. А, такъ какъ наконецъ по мѣрѣ приближенія Δx къ нулю выраженіе $\frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)}$, частное $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ на $\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}$, очевидно, стремится къ $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, или такъ какъ отношенія (12) дѣлаются въ предѣлѣ различными значеніями функціи $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при x, измѣняющемся между a и $a+h$, то можно видѣть, что разсматриваемое отношеніе $\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}$ будетъ заключаться между наибольшимъ и наименьшимъ изъ этихъ значеній $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Кромѣ того въ виду безпрерывности $f'(x)$, $\varphi'(x)$ и неуничтоженія $\varphi'(x)$ *между* предѣлами $x=a$, $x=a+h$, дробь $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ проходитъ отъ одного изъ этихъ значеній, наименьшаго или наибольшаго, до другого не иначе, какъ черезъ всѣ промежуточныя положенія величины; и, слѣдовательно, есть такой моментъ, когда она равняется $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}$. Если назвать черезъ $a+\Theta h$ значеніе x'а въ этотъ моментъ, то вполнѣ получится равенство (11)*).

*) Формула (11) распространяется и на случай, когда одна изъ двухъ функцій $f(x)$, $\varphi(x)$ не варіируетъ всегда въ одномъ и томъ же смыслѣ и когда, слѣдовательно, ихъ двѣ производныя $f'(x)$, $\varphi'(x)$, измѣняющія знакъ, уничтожаются въ разсматриваемомъ интервалѣ, если только этого нѣтъ въ одно и то же время. Это можно узнать, разсматривая безпрерывную функцію

$$f(x)-f(a)-\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}[\varphi(x)-\varphi(a)],$$

которая, будучи тождественно нулевой, при двухъ предѣлахъ $x=a$, $x=a+h$, требуетъ чтобы ея производная (безпрерывная)

$$f'(x)-\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}\varphi'(x)$$

измѣнила знакъ и, слѣдовательно, уничтожилась бы, *въ интервалѣ*, т.-е. при значеніи x'а, выражаемомъ черезъ $a+\Theta h$. Итакъ имѣемъ

$$f'(a+\Theta h)-\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}\varphi'(a+\Theta h)=0$$

Но это равенство возможно при $\varphi'(a+\Theta h)$, отличающемся отъ нуля, если допустить, что $f'(a+\Theta h)$ и $\varphi'(a+\Theta h)$ не могутъ быть нулями въ одно время. Итакъ, *при этомъ условіи*, можно раздѣлить это равенство на $\varphi'(a+\Theta h)$, тогда получится

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+\Theta h)}{\varphi'(a+\Theta h)},$$

т.-е. формула Коши. Мы будемъ прилагать ее только къ случаю, когда производная $\varphi'(x)$ не уничтожается *между* двумя предѣлами $x=a$, $x=a+h$, и вотъ почему достаточно доказать въ примѣчаніи ея примѣненіе къ другимъ случаямъ, при которыхъ необходимость разсматривать еще существующее исключеніе (по крайней мѣрѣ по доказательству) одновременнаго неуничтоженія $f'(x)$ и $\varphi'(x)$, быть можетъ, сдѣлала бы употребленіе ея менѣе полезной.

84. — Доказательство правила, относящагося къ выраженіямъ формы $\frac{0}{0}$; исключительный или содержащій спеціальныя трудности случай.

Теперь, если при значеніи a перемѣннаго двѣ функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ уничтожаются, если, кромѣ того, увеличеніе h должно стремиться къ нулю и можетъ сдѣлаться какъ угодно мало для того, чтобы производная одной, по крайней мѣрѣ, изъ двухъ функцій не перемѣняла свой знакъ между $x=a$ и $x=a+h$, то формула (11) даетъ

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}. \tag{13}$$

Допустимъ, что отношеніе $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ стремится, какъ обыкновенно и бываетъ, къ предѣлу, когда x стремится къ a. Тогда какъ только h постепенно будетъ приближаться къ нулю, θh, будетъ стремиться отъ наименьшаго абсолютнаго значенія къ нулю или постепенно, или быть можетъ, въ извѣстныхъ случаяхъ, перескакивая иногда отъ одного абсолютнаго значенія къ другому, чувствительно меньшему. Какъ бы то ни было, но вторая часть не можетъ избѣжать сходимости къ предѣлу $\frac{f'(x)}{\varphi'(\text{[redacted]})}$; а это и доказываетъ правило.

Но можно сдѣлать такъ, что при постепенномъ приближеніи x къ a, $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ будетъ колебаться безконечно разъ между болѣе или менѣе удаленными предѣлами, или не будетъ касаться никакого предѣла, а между тѣмъ вторая часть (13)-го будетъ допускать опредѣленный предѣлъ; дѣйствительно, ничто не мѣшаетъ, когда h безпрерывно уменьшается до нуля, чтобы θh варіировала по временамъ отрывисто такъ, чтобы привести всѣ послѣдующія значенія, взятыя для второй части (13)-го, къ наименьшей только части тѣхъ значеній, которыя будутъ получаться, если заставить θh уменьшаться безпрерывно. Ясно, что, въ этомъ случаѣ, употребляемое правило поведетъ къ ошибкѣ, такъ какъ $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$ или $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ будетъ стремиться къ предѣлу, а $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ нѣтъ. Итакъ, нельзя будетъ привести отношеніе двухъ функцій $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ къ отношенію ихъ производныхъ, которое, дѣйствительно неопредѣленное при $x=a$, будетъ только способно черезъ уравненіе (13) получить между своими возможными значеніями, взятыми въ безконечномъ числѣ, то, которое равняется $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$.

Любопытный примѣръ этого случая представляется, если взять

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x},\quad \varphi(x)=x \quad \text{и} \quad a=0,$$

что̀ даетъ $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$ и заставляетъ $f(x)$, $\varphi(x)$ варіировать безпрерывно даже при предѣлѣ $x=0$, гдѣ множитель $\sin\frac{1}{x}$, сдѣлавшійся $\sin\infty$, однако постоянно заключаясь между -1 и $+1$, перестаетъ варіировать постепенно. Двѣ производныя $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ дѣлаются тогда

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x},\quad \varphi'(x)=1.$$

Вторая — постоянное, а первая $f'(x)$, приводящаяся чувствительно къ $-\cos\frac{1}{x}$ при значеніяхъ ε x'а, очень сосѣднихъ съ нулемъ, — безпрерывна, разъ x отличается отъ нуля, т.-е. *между* предѣломъ $x=0$ и какимъ-либо другимъ, хотя она и перестаетъ быть такой при $x=0$, когда быстрота ея варіацій отъ ±1 до ∓1 — безконечна. По данному только что доказательству формулы (11) этого будетъ достаточно для того, чтобы можно было приложить эту формулу (11), такъ какъ безпрерывность $f(x)$ и $\varphi(x)$, существующая еще *даже* при $x=a$, позволяетъ пренебрегать, безъ чувствительной относительной ошибки, въ одновременныхъ малыхъ увеличеніяхъ $f(a+h)-f(a)$ и $\varphi(a+h)-\varphi(a)$ элементами $\Delta f(x)$, $\Delta\varphi(x)$, очень близкими отъ этого предѣла a, гдѣ производныя $f'(x)$, $\varphi'(x)$ не измѣняются уже постепеннымъ и вполнѣ опредѣленнымъ образомъ. Итакъ, ничто не мѣшаетъ разсматривать предѣльное значеніе $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, какъ равное $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, или $-\cos\frac{1}{x}$, при значеніи ε x'а, безконечно сосѣднемъ съ нулемъ. Но извѣстно, что $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, сдѣлавшееся тогда $-\cos\frac{1}{\varepsilon}$ или $-\cos\infty$, не безпрерывно и не опредѣлено между -1 и $+1$, тогда какъ истинное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, очевидно равное $x\sin\frac{1}{x}$, допускаетъ единственное значеніе, нуль, въ моментъ, когда x уничтожается.

Когда производныя $f'(x)$, $\varphi'(x)$ дѣлаются безконечными въ предѣлѣ $x=a$, то правило имѣетъ силу: а это доказываетъ еще предшествующее размышленіе относительно возможности исключать изъ увеличеній $f(a+h)-f(a)$ и $\varphi(a+h)-\varphi(a)$ элементы $\Delta f(x)$ и $\Delta\varphi(x)$, очень близкіе къ этому предѣлу a. Только тогда искомое отношеніе производныхъ представляется въ видѣ $\frac{\infty}{\infty}$, не менѣе неопредѣленномъ, чѣмъ $\frac{0}{0}$, но и къ этому виду, какъ мы вскорѣ увидимъ, примѣнимо то же самое правило. Но можно

прямо употреблять этотъ результатъ $\frac{\infty}{\infty}$, если безконечное значенie двухъ членовъ функцiи вытекаетъ изъ присутствiя общаго безконечно увеличивающагося множителя, который достаточно будетъ уничтожить. Пусть дано напр. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $\varphi(x) = \sqrt{x^2-1}$ и $a = 1$, откуда для $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ получится форма $\frac{0}{0}$. Получатся $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, $\varphi'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, значенiя, которыя дѣлаются неопредѣленными, при $x = 1$, отъ множителя $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Но ихъ частное можно написать въ видѣ $\frac{1}{2x}\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}} = \frac{1}{2x}\sqrt{x+1}$ и оно равняется $\frac{1}{\sqrt{2}}$ при $x=1$; результатъ, который получили бы точно такъ же, если бы замѣтили, что $\varphi(x) = \sqrt{x+1}\,.\,\sqrt{x-1} = \sqrt{x+1}\,f(x)$ и что слѣдовательно $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ имѣетъ для своего выраженiя $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ или обращается въ $\frac{1}{\sqrt{2}}$, когда $x = 1$.

85. — Примѣненie правила къ примѣру.

Обыкновенно отношенie $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ производныхъ стремится къ предѣлу, болѣе удобному для вычисленiя, чѣмъ истинная величина $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, находимая непосредственно.

Пусть, какъ примѣръ, надо вычислить дробь

$$(14)\qquad \frac{(e^x - e^{-x}) - x(e^x + e^{-x})}{2\sin x - 2x\cos x} \quad \text{или} \quad \frac{\sinh x - x\cosh x}{\sin x - x\cos x}$$

при предѣлѣ $x = 0$. Обыкновенно это указываютъ, заключая разсматриваемое выраженie въ скобки и ставя внизу значенie, которое даютъ x'у, однимъ изъ двухъ способовъ

$$\left(\frac{\sinh x - x\cosh x}{\sin x - x\cos x}\right)_{x=0} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\sinh x - x\cosh x}{\sin x - x\cos x}\right)_0.$$

Оба члена дроби уничтожаются при $x = 0$, поэтому замѣнимъ каждый членъ его производною, которая есть, послѣ очевиднаго приведенiя, $-x\sinh x$ для числителя и $x\sin x$ для знаменателя. Итакъ вмѣсто даннаго отношенiя (14) можно будетъ вычислить отношенie двухъ функцiй, $-x\sinh x$ и $x\sin x$, отношенie, тождественное, послѣ сокращенiя общаго множителя x, отношенiю $\frac{-\sinh x}{\sin x}$. Но такъ какъ и это —

формы $\frac{0}{0}$ при разсматриваемомъ предѣлѣ, то замѣнить эти члены ихъ собственными производными, $-\cosh x$, $\cos x$, частное которыхъ при $x=0$ есть -1, истинное искомое значеніе.

Все производство вычисленія представляется такъ:

$$\left(\frac{\sinh x - x\cosh x}{\sin x - x\cos x}\right)_0 = \left(\frac{-\sinh x}{x\sin x}\right)_0 = -\left(\frac{\sinh x}{\sin x}\right)_0 = \left(\frac{\cosh x}{\cos x}\right)_0 = 1.$$

Легко повѣрить результатъ -1, замѣняя, въ обоихъ членахъ второй дроби (14), sinus и cosinus, какъ круговыя, такъ и гиперболическія, ихъ обыкновенными разложеніями по степенямъ x'а, соединяя подобные члены, уничтожая затѣмъ множитель x^3, общій двумъ такимъ образомъ полученнымъ серіямъ, и, наконецъ, полагая $x=0$.

86. — Выраженія вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Дроби $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, которыя, при частномъ значеніи $x=a$ перемѣннаго, принимаютъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$, имѣютъ свою истинную или предѣльную величину, вычисляемую по тому же правилу, что и выраженія формы $\frac{0}{0}$, т.-е. при помощи замѣны $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *черезъ* $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Оба предѣла, подставляемые такимъ образомъ одинъ на мѣсто другого, по крайней мѣрѣ — либо нули въ одно и то же время, либо конечныя и равныя значенія, либо оба безконечны и одного и того же знака. Это важное распространеніе правила объ отношеніи двухъ уничтожающихся функцій открыто Коши.

Чтобы доказать его, придадимъ x значеніе $a+h$, близкое отъ a, которое дѣлаетъ $f(x)$ и $\varphi(x)$ безконечными, и подставимъ на мѣсто разсматриваемой дроби $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$ или $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ равнозначащее частное функціи $\frac{1}{\varphi(x)}$, нулевой при $x=a$, на функцію $\frac{1}{f(x)}$, одинаково нулевую при томъ же предѣлѣ. Эти двѣ безпрерывныя функціи очевидно приближаются къ нулю и варіируютъ всегда въ одномъ и томъ же смыслѣ, когда абсолютныя значенія $f(x)$-а и $\varphi(x)$-а увеличиваются или когда $x=a+h$ стремится къ a.

Отношеніе ихъ двухъ одновременныхъ увеличеній

$$\frac{1}{\varphi(a+h)} - \frac{1}{\varphi(a)} \text{ и } \frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)},$$

обращающееся такимъ образомъ въ $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$, будетъ равняться, по теоремѣ Коши, отношенію ихъ производныхъ

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\varphi(x)} = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}, \quad \frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

т.-е. дроби

$$\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2,$$

при извѣстномъ промежуточномъ значеніи $a+\Theta h$ перемѣннаго. Итакъ будемъ имѣть

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{\varphi'(a+\Theta h)}{f'(a+\Theta h)}\left[\frac{f(a+\Theta h)}{\varphi(a+\Theta h)}\right]^2,$$

или, въ формѣ пропорціи,

$$(15) \qquad \frac{\dfrac{f'(a+\Theta h)}{\varphi'(a+\Theta h)}}{\dfrac{f(a+\Theta h)}{\varphi(a+\Theta h)}} = \frac{\dfrac{f(a+\Theta h)}{\varphi(a+\Theta h)}}{\dfrac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}}.$$

Но допустимъ, что каждое изъ двухъ отношеній $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ стремится къ предѣлу, когда x приближается къ a, и что, при $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ этотъ предѣлъ или конеченъ и отличается отъ нуля, или нуль или безконечность.

Въ первомъ случаѣ соотношеніе (15), очевидно, дѣлается при $h=0$

$$\frac{\lim\dfrac{f'(a)}{\varphi'(a)}}{\lim\dfrac{f(a)}{\varphi(a)}} = \frac{\lim\dfrac{f(a)}{\varphi(a)}}{\lim\dfrac{f(a)}{\varphi(a)}} = 1 \quad \text{или} \quad \lim\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

что и надо было доказать.

Во второмъ случаѣ, такъ какъ Θh не болѣе близко къ нулю, чѣмъ h, то вторая часть (15) имѣетъ вообще свой числитель $\frac{f(a+\Theta h)}{\varphi(a+\Theta h)}$ также близкимъ къ своему нулевому предѣлу, какъ и соотвѣтствующій знаменатель $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$; а отсюда слѣдуетъ, что эта вторая часть (кромѣ того положительная) достигаетъ въ предѣлѣ, самое большее, единицы. Поэтому предѣлъ числителя первой части $\lim\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не можетъ превосхо-

дить по абсолютной величинѣ предѣла знаменателя $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, тогда нулевого; поэтому имѣемъ

$$\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

въ томъ смыслѣ по крайней мѣрѣ, что они оба — нули. Но ихъ предѣльное отношеніе, очевидно, можетъ быть гораздо меньше единицы; дѣйствительно, ничто не мѣшаетъ, чтобы вторая часть (15) стремилась къ нулю съ h, такъ какъ дробь $\frac{f(a+\theta h)}{\varphi(a+\theta h)}$ можетъ сдѣлаться неопредѣленно болѣе близкой къ предѣлу — нулю, чѣмъ $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$.

Наконецъ въ третьемъ случаѣ, когда $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ есть безконечность, вторая часть (15) имѣетъ по той же самой причинѣ свой числитель $\frac{f(a+\theta h)}{\varphi(a+\theta h)}$ менѣе удаленнымъ отъ своего безконечнаго предѣла, т.-е. по абсолютной величинѣ большимъ, чѣмъ знаменатель $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$. Отношеніе, очевидно положительное, этихъ двухъ очень большихъ значеній функціи, предполагаемой безпрерывной, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, превосходитъ слѣдовательно единицу. Поэтому первая часть, равная этому отношенію, показываетъ, что $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ имѣетъ знакъ $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и не имѣетъ меньшей абсолютной величины, или также безконечна. Можно понять также, что $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ можетъ быть безконечностью болѣе вызвышеннаго порядка; дѣйствительно ничто не говоритъ, что вторая часть (15)-го не увеличивается безпредѣльно по мѣрѣ того, какъ h стремится къ нулю.

Итакъ, исчисленіе $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, при $x = a$, дастъ истинную величину $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, когда послѣдній будетъ конеченъ; а когда онъ будетъ безконеченъ, то это еще надо узнать.

Замѣтимъ только, что когда двѣ функціи $f(x)$, $\varphi(x)$ дѣлаются безконечными при опредѣленномъ значеніи a перемѣннаго, ихъ быстрота увеличенія, измѣряемая ихъ производными $f'(x)$, $\varphi'(x)$, дѣлается болѣе всякаго представленія, и что, слѣдовательно, выраженіе $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ есть, какъ и разсматриваемое $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, вида $\frac{\infty}{\infty}$. Но послѣднее выраженіе довольно

часто содержитъ общихъ безконечныхъ множителей, которые появляются и въ $f'(x)$, $\varphi'(x)$, но которые можно уничтожить, такъ что правило вполнѣ примѣнимо къ требуемому результату. Кромѣ того, часто случается, что значеніе a, при которомъ двѣ функціи дѣлаются безконечными, не есть опредѣленное значеніе, но вполнѣ безконечное значеніе. Производныя $f'(x)$, $\varphi'(x)$ тогда нисколько не дѣлаются безконечными, т.-е. отношеніе $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не можетъ уже болѣе представляться подъ видомъ $\frac{\infty}{\infty}$ разсматриваемаго $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$; а между тѣмъ правило Коши продолжаетъ и здѣсь прилагаться, какъ мы видѣли.

87.— Распространеніе правила и на случай, когда при безконечномъ значеніи перемѣннаго члены разсматриваемой дроби дѣлаются либо оба нулями, либо оба безконечностями.

Допустимъ, что при $x = +\infty$ или также при $x = -\infty$ $f(x)$ и $\varphi(x)$ получатъ вмѣстѣ либо нулевыя значенія, либо безконечныя значенія. Тогда, называя черезъ y обратное x'а, мы получимъ, что эти функціи, сдѣлавшіяся $f\left(\frac{1}{y}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{y}\right)$ должны будутъ быть разсматриваемы при ясно опредѣленномъ значеніи $y = 0$, обратномъ значенія $x = \pm\infty$. Итакъ, можно будетъ, съ новымъ перемѣннымъ y, приложить правило и замѣнить отношеніе двухъ функцій $f\left(\frac{1}{y}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{y}\right)$ отношеніемъ ихъ производныхъ $f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{-1}{y^2}\right)$, $\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{-1}{y^2}\right)$. Уничтоженіе общаго множителя $\frac{-1}{y^2}$, безконечнаго въ предѣлѣ, дастъ

$$(16)\qquad (\text{при } y = 0)\quad \lim \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)}$$

или, замѣняя $\frac{1}{y}$ даннымъ значеніемъ x,

$$(17)\qquad (\text{при } x = +\infty \text{ или } -\infty) \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Правило, которое позволяетъ замѣнять отношеніе $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ двухъ функцій отношеніемъ ихъ производныхъ, слѣдовательно, приложимо и тогда, когда эти двѣ формы $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ не являются при опредѣленномъ значеніи перемѣннаго, но только въ предѣлѣ, когда абсолютное значеніе перемѣннаго неопредѣленно возрастаетъ.

88. — Примѣръ: сравненіе экспонентныхъ функцій и логариѳмовъ, дѣлающихся безконечными, съ алгебраическими функціями ихъ перемѣннаго, которыя также дѣлаются безконечными.

Какъ примѣръ, найдемъ предѣлъ отношенія $\frac{\lg x}{x^m}$, гдѣ m обозначаетъ какой-либо положительный, цѣлый или дробный, показатель и x — перемѣнное, которое неопредѣленно возрастаетъ. Двѣ функціи $f(x) = \lg x$ и $\varphi(x) = x^m$ дѣлаются безконечными при $x = \infty$; надо вычислить отношеніе $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, которое, въ виду значеній $f'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi'(x) = mx^{m-1}$, дѣлается $\frac{1}{mx^m}$. Поэтому имѣемъ

(18) $$\left(\frac{\lg x}{x^m}\right)_{x=\infty} = \left(\frac{1}{mx^m}\right)_{x=\infty} = \frac{1}{\infty} \text{ или } 0.$$

Такимъ образомъ, *когда перемѣнное дѣлается безконечностью, его логариѳмъ дѣлается также безконечностью, но безконечно-меньшею, чѣмъ всякая степень, имѣющая положительный показатель, этого перемѣннаго, и, слѣдовательно, безконечно-меньшею, чѣмъ всякая алгебраическая, неопредѣленно увеличивающаяся, функція того же перемѣннаго.* Дѣйствительно всякая цѣлая функція x'а чувствительно приводится къ своему члену наибольшаго порядка, когда абсолютное значеніе x'а дѣлается очень большимъ; если же дѣло идетъ о дробной или даже ирраціональной функціи, то дѣленія или извлеченія корня, производимыя надъ подобными одночленами, даютъ такіе же одночлены, т.-е. одночлены формы x^m, если исключить постоянный множитель.

Въ формулѣ (18) назовемъ черезъ y неопредѣленно увеличивающееся число $\lg x$ или положимъ $\lg x = y$, $x = e^y$; кромѣ того назовемъ черезъ n обратное m'а, т.-е. какое-либо положительное число $\frac{1}{m}$. Выраженіе $\frac{\lg x}{x^m}$ дѣлается $\frac{y}{e^{my}} = \left(\frac{y^n}{e^y}\right)^m$. Формула (18), которая выражаетъ, что это число стремится къ 0, когда y увеличивается, очевидно требуетъ, чтобы его n'ая степень стремилась также къ нулю или чтобы

(19) $$\left(\frac{y^n}{e^y}\right)_{y=\infty} = 0$$

Итакъ, *когда перемѣнное, y или x, дѣлается безконечностью, всякая степень съ положительнымъ показателемъ этого перемѣннаго дѣлается ею же, но безконечно-меньшей, чѣмъ соотвѣтствующее экспонентное количество e^y или e^x.*

Но это можно было бы доказать болѣе непосредственно, если бы дѣло не шло о примѣненія правила Коши, именно разложеніемъ e^x въ серію (13) [стр. 45], чувствительно состоящую при $x > 0$ изъ положительныхъ членовъ всѣхъ цѣлыхъ порядковъ величины по x вплоть

до безконечности. И соотношеніе (18) $\left(\frac{\lg x}{x^m}\right)_{x=\infty} = 0$ выводилось бы тогда изъ (19), которое, какъ мы видѣли, есть его только другая форма. Поэтому не слѣдуетъ бояться, что предыдущіе результаты будутъ подчинены, по условію, выведенному при доказательствѣ правила Коши,— существованію предѣла разсматриваемаго отношенія $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (которое есть $\frac{\lg x}{x^m}$ въ нашемъ примѣрѣ) въ то мгновеніе, когда x дѣлается значеніемъ, дѣлающимъ оба члена этого отношенія безконечными.

Изъ этого слѣдуетъ, что если при очень большихъ значеніяхъ x'а представляютъ положительныя функціи $\lg x$ и e^x выраженіемъ формы x^α, полагая такимъ образомъ $x^\alpha =$ либо $\lg x$, либо e^x, т.-е. въ виду того, что существуетъ равенство натуральнаго логариѳма x^α логариѳму $\lg x^x$ или e^x'а,

$$\alpha \lg x = \text{или } \lg\lg x, \text{ или } x,$$

то значенія показателя α, т.-е. $\frac{\lg\lg x}{\lg x}$ или $\frac{\lg y}{y}$ въ первомъ случаѣ и $\frac{x}{\lg x}$ или $\frac{e^y}{y}$ во второмъ, сдѣлаются одинъ—нулемъ, а другой—безконечностью, когда x неопредѣленно увеличивается. Итакъ *логариѳмъ безконечно-большого числа можетъ быть замѣненъ степенью этого перемѣннаго, имѣющаго свой показатель положительнымъ и безконечно-малымъ, а экспонентное количество (при основаніи e) этого самаго перемѣннаго можетъ быть замѣнено степенью этого перемѣннаго, положительный показатель которой сдѣлается безконечностью.*

Это замѣчаніе важно при разсмотрѣніи выраженій неопредѣленной формы, гдѣ, или экспонентныя количества, или логариѳмы комбинируются съ алгебраическими множителями; дѣйствительно, оно будетъ уничтожать неопредѣленность, доказывая, что алгебраическіе множители безконечно превосходятъ логариѳмы, дѣлающіеся алгебраическими множителями съ безконечно-малыми показателями, и что, наоборотъ, экспонентныя количества, приравниваемыя къ алгебраическимъ множителямъ съ безконечными показателями, безконечно превышаютъ данные алгебраическіе множители. Кромѣ того можно, хотя безъ знака, замѣнить при этомъ отношеніи безконечный и отрицательный логариѳмъ перемѣннаго, которое уничтожается, логариѳмомъ перемѣннаго, которое дѣлается безконечностью: дѣйствительно, имѣемъ $-\lg x = \lg\frac{1}{x}$ и, при $x=0$ или $\frac{1}{x}=\infty$, формула $\lg\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$, гдѣ α есть безконечно-малое ε, даетъ $-\lg x = x^{-\varepsilon}$. Изъ этого видно напр. то, что при предѣлѣ $x=0$ произведеніе $-x^m\lg x$ дѣлается $x^{m-\varepsilon}$ и, слѣдовательно, уничтожается, если данный показатель m превышаетъ нуль, хотя второй множитель $\lg x$ дѣлается безконечностью.

89. — Другія выраженія неопредѣленной формы.

Къ одной изъ двухъ формъ $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ относятъ и третью категорію выраженій неопредѣленной формы, которыя выражаются черезъ $0 \times \infty$ и представляются въ видѣ произведеній $f(x)$, $\varphi(x)$ двухъ функцій, изъ которыхъ одна $f(x)$ уничтожается въ то мгновеніе, когда другая $\varphi(x)$ дѣлается безконечностью. Чтобы привести эту категорію къ двумъ предыдущимъ, достаточно замѣнить одну изъ двухъ функцій ея обратнымъ, написаннымъ въ знаменателѣ подъ другою функціей. Такимъ образомъ напр. можно замѣнить произведеніе $x \lg x$, при $x = 0$ частнымъ $\frac{\lg x}{\frac{1}{x}}$,

переходящимъ съ $\frac{1}{x} = y$ въ дробь $-\frac{\lg y}{y}$, взятую при $y = \infty$: получится нулевой результатъ, по формулѣ (18), какъ приходится видѣть. Точно такъ же можно выраженіе $\left[x(\sqrt[x]{A} - 1)\right]_{x=\infty}$, гдѣ A должно обозначать какое-нибудь положительное число, выраженіе формы $\infty(1-1)$ или $\infty \times 0$, замѣнить дробью $\left(\frac{A^y - 1}{y}\right)_{y=0}$, формы $\frac{1-1}{0}$ или $\frac{0}{0}$, для которой (дроби) отношеніе производныхъ даетъ $\left(\frac{A^y \lg A}{1}\right)_{y=0} = \lg A$

Итакъ имѣемъ

$$(20) \qquad \left[x(\sqrt[x]{A} - 1)\right]_{x=\infty} = \lg A,$$

подобно формулѣ Бригга (№ 16, стр. 46), которая есть въ нѣкоторомъ родѣ опредѣленіе натуральнаго логариѳма, разсматриваемаго, какъ предѣлъ алгебраическихъ выраженій.

Наконецъ, послѣдній, довольно часто употребляемый, классъ выраженій неопредѣленнаго вида представляется въ показательныхъ количествахъ, имѣющихъ перемѣнное основаніе, т.-е. формы $f(x)^{\varphi(x)}$, когда показатель $\varphi(x)$ дѣлается ∞ при значеніи x, дѣлающемъ основаніе $f(x)$ равнымъ единицѣ, или когда показатель $\varphi(x)$ уничтожается въ то мгновеніе, когда основаніе $f(x)$ есть или 0, или ∞. Итакъ дѣло идетъ о формахъ 1^{∞}, 0^0, ∞^0. Эта категорія приводится къ предыдущей, если разсматривать вмѣсто функціи $f(x)^{\varphi(x)}$ ея логариѳмъ $\varphi(x) \lg f(x)$, который дѣлается тогда $\infty \times 0$ или $0 \times \infty$, и откуда легко перейти къ количеству, которое имѣетъ его для своего логариѳма. Напр. истинное значеніе x^x при предѣлѣ $x = 0$ получится, если разсматривать его логариѳмъ $x \lg x$, тогда нулевой, какъ то, что должно быть найденымъ: это истин-

ное значеніе x^x будетъ, слѣдовательно, e^0 т.-е. 1. Точно такъ же истинное значеніе $\left[\left(1+\frac{A}{x}\right)^x\right]_{x=\infty}$ будетъ имѣть для логариѳма

$$\left[x\,\lg\left(1+\frac{A}{x}\right)\right]_{x=\infty}=\left[\frac{\lg(1+Ay)}{y}\right]_{y=0},$$

т.-е. просто A въ виду того, что эта функція имѣетъ форму $\frac{0}{0}$ и что отношеніе производныхъ есть $\left(\frac{A}{1+Ay}\right)_{y=0}=A$. Итакъ будемъ имѣть

$$(21)\qquad \left[\left(1+\frac{A}{x}\right)^x\right]_{x=\infty}=e^A,$$

подобно формулѣ (4) [стр. 38], которая опредѣляетъ экспонентную функцію, какъ предѣлъ алгебраическихъ функцій.

91. — Предметъ и важность формулы Тэйлора.

Свойство постепеннаго варіированія, которымъ обладаютъ вообще даже самыя сложныя функціи, встрѣчающіяся при разсматриваніи естественныхъ феноменовъ, подчиняется однообразнымъ, приближеннымъ законамъ всякій разъ, какъ функціи разсматриваются только въ достаточно тѣсныхъ предѣлахъ. Если напр. дѣло идетъ о томъ только, чтобы къ перемѣнному функціи $f(x)$, начиная съ извѣстнаго опредѣленнаго, но какого-угодно, значенія x, придавать только положительныя или отрицательныя малыя увеличенія h, то соотвѣтствующія значенія $f(x+h)$ функціи будутъ равняться, по формулѣ стр. 31 (въ концѣ № 10), $f(x)+f'(x)h+\epsilon h$ и будутъ содержать такимъ образомъ приближенное выраженіе первой степени по отношенію къ h, $f(x)+f'(x)h$, съ ошибкой, ϵh, порядка малости, по отношенію къ h, высшаго, чѣмъ первый. Но естественно — искать обобщеніе этого результата и узнать, нельзя ли, взявъ для приближеннаго выраженія $f(x+h)$ полиномъ $\varphi(h)$ n'ой степени по отношенію къ h,

$$(23)\qquad \varphi(h)=A_0+\frac{A_1}{1}h+\frac{A_2}{1.2}h^2+\frac{A_3}{1.2.3}h^3+\dots+\frac{A_n}{1.2.3\dots n}h^n,$$

нельзя ли точно такъ же, при помощи надлежащаго выбора коэффиціентовъ A_0, $\frac{A_1}{1}$, $\frac{A_2}{1.2}$, ..., $\frac{A_n}{1.2.3\dots n}$, привести разность между $f(x+h)$ и

этимъ полиномомъ $\varphi(h)$ къ выраженію формы εh^n, гдѣ ε стремится къ нулю въ то же время, какъ и h; вслѣдствіе этого, получаемая ошибка, при h, равномъ очень близкому къ нулю числу, дѣлается несравненно меньшею, чѣмъ послѣдній членъ $\frac{A_n}{1.2.3...n}$, всякій разъ, какъ A_n отличается отъ нуля. Кромѣ того, можно замѣтить, что придавая тогда n'у все болѣе и болѣе увеличивающіяся значенія, мы получимъ, что полиномъ $\varphi(h)$ можетъ подчиняться вполнѣ какимъ-либо условіямъ, вслѣдствіе уменьшенія *остатка* или *дополнительнаго члена* εh^n, именно сдѣлаться, въ предѣлѣ, сходящейся серіей, дѣлающей практически возможнымъ разсмотрѣніе и даже численное исчисленіе функцій $f(x+h)$, быть можетъ, трудныхъ для иного исчисленія. Кромѣ того эта форма полинома, болѣе простая, чѣмъ та, которую даетъ алгебра, форма, такимъ образомъ примѣняемая ко всѣмъ функціямъ, обладающимъ достаточно постепенныхъ варіированіемъ, — будетъ выражать, какъ это будетъ указано, при всѣхъ этихъ функціяхъ существованіе общихъ свойствъ, по крайней мѣрѣ, въ сосѣдствѣ съ какимъ-либо однимъ изъ ихъ значеній, взятымъ за точку отправленія, и будетъ ясно выражать это свойство. Такова важнѣйшая цѣль формулы Тэйлора.

92. — О соприкосновеніи двухъ функцій. условія, при которыхъ такое соприкосновеніе будетъ даннаго подряка n.

Такъ какъ разность, которую мы будемъ разсматривать, двухъ функцій $f(x+h)$, $\varphi(h)$ должна будетъ, при очень малыхъ абсолютныхъ значеніяхъ h'а, быть высшаго, чѣмъ n'ый, порядка малости по отношенію къ h, то надо указать сначала на то, что́ мы будемъ называть болѣе или менѣе *возвышеннымъ соприкосновеніемъ* двухъ функцій. Мы будемъ говорить, что двѣ функціи h'а представляютъ, при значеніи $h=0$, напр. соприкосновеніе цѣлаго порядка n (по крайней мѣрѣ равнаго 1), когда ихъ разность, которую я назову черезъ $\psi(h)$, дѣлается въ сосѣдствѣ съ этимъ значеніемъ $h=0$ напр. высшаго, чѣмъ n-ый, порядка малости по отношенію къ h, но не высшаго, чѣмъ $(n+1)$-ый. Отношеніе $\psi(h)$ къ h^n, слѣдовательно, должно стремится къ 0 вмѣстѣ съ h, но не отношеніе $\psi(h)$ къ h^{n+1}.

Отсюда слѣдуетъ, что послѣдовательныя производныя данныхъ двухъ функцій, вплоть до n'ыхъ включительно, равны, при $h=0$, другъ другу, или, что́ то же самое, что производныя ихъ разности $\psi(h)$, т.-е. $\psi'(h)$, $\psi''(h),\ldots,\psi^{(n)}(h)$ уничтожаются, такъ какъ $\psi(h)$ уничтожается при томъ же предѣлѣ $h=0$. Чтобы это доказать, придадимъ сначала къ перемѣнному h увеличивающіяся, начиная съ 0, значенія, и выразимъ этимъ, что разность $\psi(h)$ дѣлается тогда положительной, что будетъ на самомъ дѣлѣ, если та изъ двухъ данныхъ функцій, которую вычитаютъ изъ дру-

гой, есть наименьшая изъ двухъ при предположенныхъ условіяхъ. Положительный остатокъ $\psi(h)$ двухъ функцій будетъ имѣть по условію съ h^n отношеніе, стремящееся къ нулю въ то же время, какъ и h и, слѣдовательно, меньшее всякаго, какого угодно, положительнаго числа, лишь бы только h оставалось само достаточно малымъ. Если мы назовемъ черезъ $\frac{\varepsilon}{1.2.3\ldots n}$ это число, то получимъ

$$(24)\qquad \psi(h) > 0, \quad \psi(h) - \varepsilon\frac{h^n}{1.2.3\ldots n} < 0:$$

Такимъ образомъ первыя части этихъ неравенствъ, сначала нули, идутъ одна увеличиваясь, другой уменьшаясь, и если допустить, что онѣ безпрерывны или что $\psi(h)$ безпрерывно, то ихъ производныя не могутъ перестать быть одна положительной, другая отрицательной.

Итакъ имѣемъ

$$(25)\qquad \psi'(h) > 0, \quad \psi'(h) - \varepsilon\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} < 0,$$

неравенства, подобныя предыдущимъ и показывающія, что производная $\psi'(h)$ уничтожается, какъ и $\psi(h)$, при предѣлѣ $h = 0$. Точно такъ же, если функціи $\psi'(h)$, $\psi''(h), \ldots, \psi^{(n-1)}(h)$ безпрерывны, то выведемъ:

$$(26)\qquad \begin{cases} \psi''(h) > 0, \quad \psi''(h) - \varepsilon\frac{h^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} < 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi^{(n-1)}(h) > 0, \quad \psi^{(n-1)}(h) - \varepsilon\frac{h}{1} < 0, \\ \psi^{(n)}(h) > 0, \quad \psi^{(n)}(h) - \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Такъ какъ число ε должно стремиться къ нулю въ то же время, какъ и наибольшее разсматриваемое значеніе h'а, то можно видѣть, что эти неравенства требуютъ, въ суммѣ, уничтоженія $\psi(0)$, $\psi'(0), \ldots, \varphi^{(n)}(0)$, т.-е. требуютъ равенства, при $h = 0$, двухъ данныхъ функцій, разность которыхъ выражается черезъ $\psi(h)$, и ихъ n первыхъ производныхъ, сравниваемыхъ другъ съ другомъ.

Мы придемъ къ тому же заключенію, если будемъ придавать h'у, все начиная съ нуля, отрицательныя значенія; это не измѣнитъ ничего въ первомъ неравенствѣ (24), если надлежащимъ образомъ выбрать еще ту изъ двухъ функцій $f(x+h)$, $\varphi(h)$, превышеніе которой надъ другой выражается черезъ $\psi(h)$, но это, въ случаѣ нечетнаго n, заставляетъ во второмъ неравенствѣ (24) брать ε отрицательнымъ для того, чтобы произведеніе εh^n продолжало быть положительнымъ. Только

тогда, такъ какъ h уменьшается, увеличивающіяся функціи будутъ имѣть отрицательныя производныя, а функціи уменьшающіяся — положительныя; а это заставляетъ измѣнять, отъ одной строки неравенствъ къ другой, смыслъ неравенствъ. Каждая изъ производныхъ $\psi'(h)$, $\psi''(h), \ldots$, $\psi^{(n)}(h)$ не будетъ уже заключаться между 0 и предѣломъ, стремящимся къ нулю вмѣстѣ съ h.

Такимъ образомъ, *соприкосновеніе порядка n двухъ функцій требуетъ не только ихъ дѣйствительнаго равенства, но также и взаимнаго равенства ихъ послѣдовательныхъ производныхъ до n-ыхъ включительно.*

Обратно, *если двѣ данныя функціи и ихъ n первыхъ производныхъ равны другъ другу, при опредѣленномъ значеніи ихъ перемѣннаго,* и если, слѣдовательно, считая малыя увеличенія h, начиная съ этого значенія, разность двухъ функцій, которую я назову опять черезъ $\psi(h)$, но которая берется со знакомъ, а не только по абсолютной величинѣ, удовлетворяетъ $n+1$ условій $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=0$, $\psi''(0)=0, \ldots$, $\psi^{(n)}(0)=0$, *то эти двѣ функціи будутъ представлять, при разсматриваемомъ значеніи ихъ перемѣннаго, соприкосновеніе порядка, по крайней мѣрѣ, равнаго n.*

Дѣйствительно, замѣчая сначала, что h увеличивается отъ нуля до положительнаго, не только очень малаго, но какого угодно, значенія (для того, чтобы построить въ то же время, между двумя, сколь угодно тѣсными предѣлами, формулу, необходимую далѣе, разности $\psi(h)$ двухъ функцій), — назовемъ черезъ m — наименьшее и черезъ M — наибольшее изъ значеній, которыя получаетъ въ этомъ интервалѣ производная $\psi^{(n)}(h)$; такимъ образомъ m и M замѣняютъ два предѣла, нуль и ε, $\psi^{(n)}(h)$-а, разсмотренные въ предыдущемъ доказательствѣ. Вмѣсто послѣдней строки неравенствъ (26), будемъ имѣть

$$(27)\qquad \psi^{(n)}(h)-m>0, \quad \psi^{(n)}(h)-M<0.$$

Но первыя части послѣднихъ суть производныя двухъ функцій $\psi^{(n-1)}(h)-m\frac{h}{1}$ и $\psi^{(n-1)}(h)-M\frac{h}{1}$. Изъ этихъ двухъ функцій, первоначально или при $h=0$ нулевыхъ по условію, первая слѣдовательно увеличивается съ h, тогда какъ вторая уменьшается, однако если только та и другая безпрерывны; вмѣсто предпослѣдней строки (26) получается

$$(28)\qquad \psi^{(n-1)}(h)-m\frac{h}{1}>0, \quad \psi^{(n-1)}(h)-M\frac{h}{1}<0.$$

Точно такъ же замѣтимъ, что первыя части этихъ неравенствъ суть производныя отъ $\psi^{(n-2)}(h)-m\frac{h^2}{1.2}$ и $\psi^{(n-2)}(h)-M\frac{h^2}{1.2}$, etc.; а рядъ аналогичныхъ разсужденій дастъ въ концѣ концовъ

$$(29)\qquad \psi(h)-m\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}>0, \quad \psi(h)-M\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}<0.$$

Итакъ отношеніе $\psi(h)$ къ $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}$ заключено между наименьшимъ, m, и наибольшимъ, M, изъ значеній, получаемыхъ n-ой производной $\psi^{(n)}(h)$ въ то время, какъ h, сначала нуль, постепенно достигаетъ своего настоящаго положенія. Такое же разсужденіе, исключая перемѣны смысла неравенствъ при переходѣ отъ одной строки формулъ къ другой, очевидно, приложимо будетъ къ случаю отрицательныхъ или уменьшающихся значеній h'а.

Но допустимъ безпрерывность не только $\psi(h)$ и ея $n-1$ первыхъ производныхъ, что мы уже дѣлали, но также и n-ной производной $\psi^{(n)}(h)$. Тогда при очечь маломъ h, частныя значенія m и M не могутъ перестать быть какъ угодно близкими къ $\psi^{n}(0)$, которая равна нулю по условію; и отношеніе $\psi(h)$ къ $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}$, заключенное между m и M, будетъ стремиться къ нулю вмѣстѣ съ h. А это доказываетъ, что $\psi(h)$ будетъ порядка малости по отношенію къ h, высшаго, чѣмъ n'ый, или, что двѣ данныя функціи будутъ имѣть соприкосновеніе порядка, по крайней мѣрѣ, равнаго n. Слѣдуетъ (чтобы прійти къ выраженію $\psi(h)$, выведенному только что) замѣтить, что безпрерывная функція $\psi^{n}(h)$, между двумя моментами, гдѣ она равна m и M, проходитъ черезъ всѣ промежуточныя значенія, и что, въ частности, въ извѣстный моментъ, когда ея перемѣнное можетъ быть представлено черезъ Θh, если Θ есть (неизвѣстная) дробь единицы или Θh есть дробь h'а, она равняется отношенію, которое мы видѣли, $\psi(h)$-а къ $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}$.

Поэтому получается

$$\psi(h) = \frac{h^n}{1\ 2\ 3\ 4\ldots n}\psi^{n)}(\Theta h). \tag{30}$$

Наконецъ, *соприкосновеніе двухъ данныхъ функцій достигнетъ вполнѣ порядка n, не переходя его, если ихъ $(n+1)$-ыя производныя при $h=0$ различны.* Дѣйствительно тогда $(n+1)$ ая производная, $\psi^{(n+1)}(h)$, ихъ разности не будетъ уничтожаться при предѣлѣ $h=0$ и не перестанетъ, между этимъ предѣломъ и другимъ, довольно сосѣднимъ отъ перваго, сохранять свой знакъ вмѣстѣ съ замѣтными значеніями. Называя соотвѣтственно черезъ α и β наименьшее и наибольшее изъ этихъ значеній, мы будемъ имѣть, слѣдовательно, неравенства

$$\psi^{n+1)}(h) - \alpha > 0, \qquad \psi^{n+1)}(h) - \beta < 0.$$

Но, благодаря предположенной безпрерывности $\psi(h)$ и ея n первыхъ производныхъ, мы опять придемъ отъ этихъ двухъ неравенствъ, по-

средствомъ процесса, употребленнаго нами уже для перехода отъ (27) къ (29), къ двумъ соотношеніямъ

$$\psi(h) - \alpha \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} \gtrless 0, \quad \psi(h) - \beta \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} \lessgtr 0,$$

доказывающимъ вполнѣ, что отношеніе $\psi(h)$ къ h^{n+1} заключается между двумя числами, $\frac{\alpha}{1.2.3\ldots(n+1)}$ и $\frac{\beta}{1.2.3\ldots(n+1)}$, одного и того же знака и замѣтной величины, или, что $\psi(h)$ — не высшаго, чѣмъ $(n+1)$-ный, порядка малости по отношенію къ h.

Точно такъ же можно видѣть, что, если производная $\psi^{(n+1)}(h)$ — безпрерывна или получаетъ одинъ и тотъ же знакъ и съ той и съ другой стороны значенія $h=0$, т.-е. при положительномъ h, какъ и при отрицательномъ h, — то отношеніе $\psi(h)$ къ h^{n+1} будетъ имѣть такой же знакъ, что α и β, въ сосѣдствѣ съ $h=0$, и что, слѣдовательно, $\psi(h)$ будетъ измѣнять знакъ въ одно и то же время, какъ h, или не будетъ его измѣнять, смотря по тому, будетъ ли показатель $n+1$ нечетный или четный.

Итакъ, *когда соприкосновеніе есть четнаго n порядка, то та изъ двухъ данныхъ функцій, которая больше другой немного раньше того момента, когда онѣ достигаютъ своего общаго значенія, — дѣлается меньшей тотчасъ послѣ этого момента: она остается, наоборотъ, большей послѣ, какъ и раньше, когда порядокъ соприкосновенія — нечетный.*

Можетъ случиться, что двѣ функціи, вполнѣ различныя другъ отъ друга, будутъ имѣть соприкосновеніе безконечнаго порядка при извѣстныхъ значеніяхъ перемѣннаго и что, слѣдовательно, всѣ ихъ производныя на короткое время будутъ равны другъ другу. Это происходитъ въ то мгновеніе когда $x=0$, какъ это открылъ Коши, въ функціи $y=0$, сравниваемой съ экспонентной $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$, которая есть нуль въ данный моментъ $x=0$ и увеличивается вмѣстѣ съ абсолютной величиной x'а, стремясь при $x=\pm\infty$ къ высшему предѣлу 1-цѣ. Послѣдовательныя производныя этой экспонентной функціи будутъ

$$y' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad y'' = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \ldots,$$

составляясь, очевидно, изъ членовъ, которые всѣ будутъ содержать это экспонентное количество, умножаемое на степень $\frac{1}{x}$, имѣющую цѣлый и положительный показатель. Дѣлая $\frac{1}{x^2}=u$, мы получимъ, что всѣ члены будутъ, съ надлежащимъ коэффиціентомъ, формы $u^m e^{-u} = \frac{u^m}{e^u}$,

гдѣ показатель m есть число положительное, кратное $\frac{1}{2}$; но мы видѣли (стр. 142), что такое экспонентное количество стремится къ нулю, когда u увеличивается или когда x приближается къ нулю. Такимъ образомъ, при предѣлѣ $x=0$, всѣ послѣдовательныя производныя даннаго экспонентнаго количества уничтожаются, какъ и само экспонентное количество; и послѣднее имѣетъ тогда соприкосновеніе безконечнаго порядка съ функцей $y=0$.

Точно то же будетъ съ экспонентнымъ количествомъ $y=e^{-\frac{1}{x}}$, если разсматривать, въ сосѣдствѣ $x=0$, только положительныя или увеличивающіяся значенія x'а, такъ какъ при отрицательныхъ значеніяхъ экспонентное количество и всѣ его производныя сдѣлаются при предѣлѣ $x=0$ не нулями, а безконечностью.

Природа иногда реализируетъ, насколько мы объ этомъ можемъ судить, такія соприкосновенія безконечнаго порядка между функціями, которыя представляютъ два феномена, происходящіе послѣдовательно въ одномъ и томъ же мѣстѣ, или двѣ послѣдовательныя фазы одного и того же феномена, управляемыя двумя различными законами; дѣйствительно, это есть случаи, когда природа можетъ употребить, въ нѣкоторомъ родѣ, все свое искусство сберегать переходы и соединенія (напр. при началѣ движенія жидкой массы, происходящаго отъ треній, которыя производитъ соприкосновеніе плоской стѣнки, приходящей въ движеніе, начиная съ извѣстнаго момента скоростей, касательныхъ къ ея собственной плоскости).

93. — Формула и серія (строка) Тэйлора; общіе случаи сходимости.

Мы знаемъ теперь, что чтобы привести къ выраженію формы ϵh^n разность между данной функцей $f(x+h)$ и полиномомъ n-ой степени $\varphi(h)$, опредѣленнымъ формулой (25) [№ 91], достаточно приравнять другъ къ другу, при предѣлѣ $h=0$, эти двѣ функціи и ихъ n первыхъ производныхъ по h. Но послѣдовательныя производныя по h отъ $f(x+h)$ очевидно будутъ $f'(x+h)$, $f''(x+h)$ ...; производныя же отъ $\varphi(h)$ получаются при помощи непосредственныхъ дифференцированій. При $h=0$ данная функція и ея n первыхъ производныхъ дѣлаются $f(x), f'(x), \ldots f^{(n)}(x)$, тогда какъ аналогичныя значенія $\varphi(h)$, $\varphi'(h), \ldots, \varphi^{(n)}(h)$ обратятся соотвѣтственно въ A_0, A_1, $A_2, \ldots, A_n$.

Итакъ возьмемъ

$$(31) \qquad A_0=f(x), \quad A_1=f'(x), \quad A_2=f''(x), \ldots, A_n=f^{(n)}(x).$$

Кромѣ того разность $\psi(h)=f(x+h)-\varphi(h)$ для n-ой производной будетъ имѣть

$$f^{(n)}(x+h)-A_n \quad \text{или} \quad f^{(n)}(x+h)-f^{(n)}(x),$$

такъ какъ n-ая производная полинома $\varphi(h)$ есть постоянное количество; и формула (30) даетъ

$$\psi(h) \text{ или } f(x+h)-\varphi(h)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(x+\Theta h)-f^{(n)}(x)].$$

Обозначимъ черезъ R_n тотъ *остатокъ* или *дополнительный членъ*, который долженъ быть прибавленъ къ полученному *разложенному* количеству $\varphi(h)$ n-ой степени, чтобы снова составить функцію $f(x+h)$, и тогда получимъ двѣ формулы

$$(32)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2.}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x)+R_n,$$

$$(33)\qquad R_n=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(x+\Theta h)-f^{(n)}(x)].$$

Первая называется *формулой Тэйлора;* ея вторая часть дѣлается *серіей Тэйлора,* когда заставляютъ n неопредѣленно увеличиваться, а R_n стремиться къ нулю. Вторая заключаетъ очень простое выраженіе ошибки R_n, которая получается для $f(x+h)$, если окончить серію на извѣстномъ членѣ. Въ случаѣ $n=1$, который служилъ намъ точкой отправленія это выраженіе обращается въ $h[f(x+\Theta h)-f(x)]$, какъ это уже и показало намъ основное соотношеніе (стр. 31).

Единственныя условія, могущія быть допущенными при составленіи формулы (33) R_n и относящіяся къ функціи $\psi(h)=f(x+h)-\varphi(h)$, заключаются въ безпрерывности этой функціи и ея n первыхъ производныхъ на всемъ интервалѣ, заключенномъ между нулевымъ значеніемъ h'а и его настоящимъ значеніемъ. Но эти условія будутъ удовлетворяться, если, съ одной стороны, полиномъ $\varphi(h)$ — безпрерывенъ, что требуетъ, чтобы $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, или $f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ не были его безконечными значеніями, и съ другой стороны, если функціи $f(x+h)$, $f'(x+h)$, $f''(x+h), \ldots, f^{(n)}(x+h)$ не перестаютъ сами быть безпрерывными между крайними значеніями x и $x+h$ ихъ перемѣннаго.

Тогда, разсматривая спеціально очень малыя абсолютныя значенія h'а, мы увидимъ, что полученное разложеніе будетъ выражать разбивку $f(x+h)$-а на элементы, $f(x)$, $\frac{f'(x)}{1}h$, $\frac{f''(x)}{1.2}h^2$, ..., все болѣе и болѣе увеличивающагося порядка малости.

Слѣдовательно, серія будетъ сходиться очень быстро: отношеніе каждаго члена къ предыдущему (исключая тѣхъ, которые будутъ тождественно нулями) будетъ содержать множитель h и будетъ безконечно-малымъ. Но, кромѣ того, она будетъ вполнѣ сходиться къ $f(x+h)$, такъ какъ можно видѣть, посредствомъ второй части (33)-го, что отношеніе остатка R_n къ послѣднему употребляемому члену, $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x)$, будетъ равняться частному, уничтожающемуся вмѣстѣ съ h, $\frac{f^{(n)}(x+\Theta h)-f^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)}$,

дѣлимое котораго есть увеличеніе безпрерывной функціи $f^{(n)}(x)$ при очень маломъ измѣненіи Θh перемѣннаго, а дѣлитель $f^{(n)}(x)$, не зависящій отъ h, отличается отъ нуля, если допустить, что послѣдній разсматриваемый членъ, на которомъ мы кончили серію, самъ отличается отъ нуля.

Безпрерывность функціи f и ея производныхъ, разъ допущенная, заставляетъ для того, чтобы $f(x+h)$ при очень малыхъ увеличеніяхъ h была разложена посредствомъ серіи Тэйлора, заставляетъ, чтобы послѣдовательныя производныя $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... вплоть до безконечности, были нулями при частномъ выбранномъ значеніи x. Тогда формула (32), такъ сказать, не найдетъ ничего, что она могла бы извлечь изъ количества $f(x+h)$ или, по крайней мѣрѣ, изъ ея перемѣнной части $f(x+h)-f(x)$, такъ какъ послѣдняя, приведенная къ виду $R_n=\frac{h^n}{1.2.3...n}f^{(n)}(x+\Theta h)$, гдѣ $f^{(n)}(x+\Theta h)$ будетъ стремиться къ нулю съ h, какъ бы велико ни было взято n, — будетъ безконечнаго порядка малости по h. Въ другихъ словахъ, количество $f(x+h)$ варіировало бы, въ сосѣдствѣ съ $h=0$ и въ видѣ функціи h'а, медленнѣе, чѣмъ всякая степень h'а, и, слѣдовательно, ея ходъ въ этотъ моментъ не заключалъ бы приближеннаго алгебраическаго выраженія. Коши далъ, какъ примѣръ такой функціи, экспонентную $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$, о которой мы только что говорили и которая, при $x=0$, представляетъ соприкосновеніе безконечнаго порядка съ функціей, постоянно нулевой, $y=0$. Это экспонентное количество, если считать увеличенія h, начиная съ нулевого значенія x'а, — слѣдовательно, способно, благодаря своей крайней малости въ сосѣдствѣ съ этимъ значеніемъ, къ разложенію по формулѣ Тэйлора и даже ко всякому другому разложенію, по какимъ угодно степенямъ h'а, даже если бы онѣ имѣли дробныя показатели.

Исключая очень рѣдкій случай, мы будемъ имѣть, что формулы (32) и (33) точно будутъ выполнять ту цѣль, которую мы предполагали въ случаѣ малыхъ измѣненій h. Но доказательство ихъ, не требуя никакого предварительнаго условія относительно величины h, будетъ служить и для разложенія $f(x+h)$ въ серію всякій разъ, какъ только будетъ возможно доказать уничтоженіе R_n при предѣлѣ $n=\infty$.

А это, по (33), обязательно будемъ имѣть, когда производныя, предполагаемыя кромѣ того безпрерывными, отъ $f(x+h)$ не будутъ неопредѣленно увеличиваться по мѣрѣ увеличенія ихъ порядка; и тогда, какъ бы велико ни было h, разложеніе въ серію будетъ имѣть конецъ. Дѣйствительно, если множитель $f^{(n)}(x+\Theta h)-f^{(n)}(x)$, въ (33), не будетъ переходить извѣстнаго значенія, то для того, чтобы R_n стремилось къ нулю, будетъ достаточно, чтобы произведеніе $\frac{h^n}{1.2.3...n}$ само стремилось къ нулю. Но это то и есть; дѣйствительно, если p обозначаетъ цѣлое число, высшее h'а,

то это произведеніе можетъ всегда, при довольно большомъ n, быть написано въ видѣ $\left(\frac{h^p}{1.2.3\ldots p}\right)\left(\frac{h}{p+1}\frac{h}{p+2}\cdots\frac{h}{n}\right)$; съ одной стороны, конечный множитель $\frac{h^p}{1.2.3\ldots p}$ не варіируетъ вмѣстѣ съ n, тогда какъ, съ другой стороны, множитель $\frac{h}{p+1}\frac{h}{p+2}\cdots\frac{h}{n}$, очевидно меньшій, чѣмъ $\left(\frac{h}{p+1}\right)^{n-p}$, стремится къ нулю, какъ и послѣдовательныя степени этой дроби $\frac{h}{p+1}$.

Между функціями, которыя входятъ въ этотъ случай сходимости или производныя которыхъ не увеличиваются неопредѣленно по мѣрѣ увеличенія ихъ порядка, важно замѣтить три основныя функціи e^x, $\cos x$ и $\sin x$, которыя снова являются безъ конца посредствомъ одного или нѣсколькихъ дифференцированій. Мы скоро увидимъ (№ 95), какія разложенія по степенямъ напр. x'а даютъ эти функціи, и такимъ образомъ точно найдемъ выраженія, въ видѣ серіи, $\cos x$ и $\sin x$.

94. - Виды остатка, выведенные Лагранжемъ, Коши и Рошемъ.

Другіе болѣе рѣдкіе, но болѣе любопытные случаи сходимости серіи Тэйлора требуютъ иногда употребленія формы остатка R_n, выведенной Коши, остатка, который нѣсколько труднѣе, чѣмъ (33); поэтому предварительно намъ слѣдуетъ заняться выраженіями, наименѣе сложными изъ тѣхъ, которыя можетъ получить остатокъ R_n. Мы допустимъ, для этой цѣли, безпрерывность не только функцій f, f', f'',..., $f^{(n)}$, но также и слѣдующей производной $f^{(n+1)}$, между двумя значеніями, x и $x+h$, перемѣннаго.

Это условіе, прежде всего, позволитъ произвести, въ (32), разложеніе до члена $\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(x)$; а это введетъ новый остатокъ R_{n+1}, выражающійся по (33) черезъ

$$\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}[f^{(n+1)}(x+\Theta h)-f^{(n+1)}(x)],$$

съ значеніемъ Θ, отличающимся, конечно, отъ того, которое содержитъ выраженіе (33) остатка R_n.

Но предыдущій остатокъ R_n, очевидно, представляетъ сумму новаго члена и R_{n+1}; вслѣдствіе чего имѣемъ

$$(34)\qquad R_n=\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(x+\Theta h).$$

Такова форма остатка, которая, какъ видно, есть простое видоизмѣненіе или примѣненіе (33)-ей и которая, выведенная Лагранжемъ, была извѣстна первою.

Когда же h очень мало, то вообще, можно, безъ замѣтной ошибки, замѣнить здѣсь $f^{(n+1)}(x+\Theta h)$ черезъ $f^{(n+1)}(x)$, тогда такъ, въ (33), малая разность, $f^{(n)}(x+\Theta h)-f^{(n)}(x)$, отъ $f^{(n)}(x)$ въ то же время приведется къ произведенію производной $f^{(n+1)}(x)$ на увеличеніе Θh перемѣннаго. Тогда сравненіе двухъ значеній (33) и (34) показываетъ, что, въ (33), имѣютъ $\Theta=\frac{1}{n+1}$. Такимъ образомъ часть единицы, названная черезъ Θ въ (33), не принимаетъ индефферентно, слѣдуя природѣ функціи, какія-либо значенія между 0 и 1, по крайней мѣрѣ, когда h очень мало; дѣйствительно, она стремится, вообще, къ $\frac{1}{n+1}$, когда h приближается къ нулю. Въ самомъ простомъ случаѣ, т.-е когда $n=1$, и когда совокупность двухъ формулъ (33) и (34) равнозначитъ основному соотношенію $f(x+h)-f(x)=hf'(x+\Theta h)$, получается $\Theta=\frac{1}{2}$ или, если раздѣлить соотношеніе на h,

$$(35)\qquad \text{(при очень маломъ } h\text{)}\quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Но перейдемъ къ формѣ R_n, выведенной Коши. Чтобы получить ее, замѣтимъ, что вторая часть (32)-ой, безъ послѣдняго члена R_n, выражала бы $f(x+h)$, если бы производная $f^{(n+1)}$ была тождественно нулемъ; это привело бы къ нулю вторую часть (33)-ей. Тогда сумма

$$(36)\qquad f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x),$$

равная $f(x+h)$, зависѣла бы только отъ окончательнаго значенія $x+h$, которое я могу назвать черезъ X, а не отъ его начальнаго значенія x, посредствомъ котораго, кромѣ того, выражается разность $h=X-x$. Поэтому, если назвать черезъ $F(x)$ эту сумму (36), гдѣ x будетъ разсматриваться какъ перемѣнное, т.-е. если положить

$$(37)\left\{\begin{aligned} F(x)&=f(x)+\frac{X-x}{1}f'(x)+\\ &\quad+\frac{(X-x)^2}{1.2}f''(x)+\cdots+\frac{(X-x)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x),\end{aligned}\right.$$

то можно быть увѣреннымъ, что производная $F'(x)$ уничтожится, разъ будемъ имѣть тождественно $f^{(n+1)}(x)=0$; а такъ какъ та же форма (37) $F(x)$'а показываетъ, что $F'(x)$ содержитъ $f^{(n+1)}(x)$ только въ послѣднемъ членѣ, то для того, чтобы уничтоженіе послѣдняго члена влекло за собой уничтоженіе и $F'(x)$, неизбѣжно должно быть, чтобы

всѣ предыдущіе члены, какова бы ни была функція $f(x)$, уничтожали другъ друга. Дѣйствительно, если продифференцировать по x вторую часть (37), то каждый членъ формы $\frac{(X-x)^m}{1.2.3\ldots m} f^{(m)}(x)$ дастъ для производной, если заставить сперва варіировать множитель $(X-x)^m$, а затѣмъ множитель $f^{(m)}(x)$,

$$-\frac{m(X-x)^{m-1}}{1.2.3\ldots m} f^{(m)}(x) + \frac{(X-x)^m}{1.2.3\ldots m} f^{(m+1)}(x),$$

выраженіе, первая часть котораго уничтожаетъ вторую, происшедшую отъ дифференцированія предыдущаго члена $\frac{m(X-x)^{m-1}}{1.2.3\ldots m} f^{(m-1)}(x)$. Такъ какъ, кромѣ того, при первомъ членѣ $f(x)$ или $\frac{1(X-x)^{1-1}}{1} f(x)$ производная обращается во вторую часть, то остается только вторая часть производной послѣдняго члена, — поэтому, какова бы ни была функція $f(x)$, въ окончательномъ видѣ имѣемъ

$$(38) \qquad F'(x) = \frac{(X-x)^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n+1)}(x).$$

Но въ мгновеніе, когда $x = X$, $F(x)$ обращается тождественно, по (37), въ $f(X)$, т.-е. въ $f(x+h)$. Слѣдовательно, остатокъ R_n, разность между $f(x+h)$ и выраженіемъ (36), есть не что иное, какъ увеличеніе, $F(X) - F(x)$, функціи $F(x)$, соотносительное съ увеличеніемъ $X - x$ перемѣннаго, и равняется, по основной формулѣ дифференціальнаго исчисленія, произведенію этого послѣдняго увеличенія $X - x$ или h на производную F', взятую при извѣстномъ значеніи перемѣннаго, промежуточномъ между x и $X = x + h$, значеніи, которое можно назвать черезъ $x + \Theta h$. А это вполнѣ предполагаетъ безпрерывность $F(x)$ и $F'(x)$, т.-е. функціи f и ея $n+1$ первыхъ производныхъ, между предѣлами x и $x+h$. Поэтому, при этихъ условіяхъ, получается

$$R_n = hF'(x + \Theta h),$$

т.-е. въ виду соотношенія (38), гдѣ надо будетъ замѣнить X черезъ $x+h$ и x — черезъ $x + \Theta h$,

$$(39) \qquad R_n = \frac{(h + \Theta h)^n}{1.2.3\ldots n} h f^{(n+1)}(x + \Theta h).$$

Такова форма остатка, полученная Коши. Преимущество ея надъ (33) или надъ предыдущей (34) для доказательства, въ случаѣ, гдѣ это трудно

узнать, что R_n стремится къ нулю, когда n неопредѣленно увеличивается, заключается въ томъ, что въ числителѣ, на мѣстѣ n множителей h формулы (33) появляется то же самое неопредѣленно возрастающее число множителей, болѣе близкихъ къ нулю, $h - \Theta h$.

Наконецъ Рошъ (Roche), бывшій профессоръ de la Faculté des Sciences въ Монпелье, показалъ въ 1858 году, что двѣ формы остатка, найденные Лагранжемъ и Коши, заключаются въ другой формѣ, гораздо болѣе общей и почти такъ же простой.

Продолжая разсматривать конечное значеніе X или $x + h$, какъ неподвижное, и заключая R_n, при разсматриваемомъ, одинаково неподвижномъ, значеніи x'а, въ форму Mh^p, т.-е. въ $M(X - x)^p$, мы получимъ, что p означаетъ постоянный показатель, высшій нуля, но произвольный. Слѣдовательно, выраженіе (36), увеличенное на Mh^p, или, что приводитъ къ тому же по (37), сумма $F(x) + M(X - x)^p$ есть функція x'а, которая, обращаясь, очевидно, въ $F(x) = f(X)$ при $x = X$, дѣлается равной $f(X)$, когда x, удаляясь отъ X, касается другого неподвижнаго предѣла, который здѣсь ранѣе предположенъ: дѣйствительно M вполнѣ обозначаетъ количество, необходимое для того, чтобы это было. Итакъ, по теоремѣ второй главы (стр. 31), производная $F'(x) - Mp(X - x)^{p-1}$, уничтожается въ интервалѣ, лишь бы только, по крайней мѣрѣ, она была безпрерывна, какъ функція; а это будетъ имѣть мѣсто, если f и ея $n+1$ первыхъ производныхъ — безпрерывны. Называя опять черезъ $x + \Theta h$ промежуточное значеніе, о которомъ идетъ рѣчь, мы будемъ имѣть

$$F'(x + \Theta h) - Mp(h - \Theta h)^{p-1} = 0;$$

откуда

$$M = \frac{F'(x + \Theta h)}{p(h - \Theta h)^{p-1}}.$$

Подставимъ на мѣсто $F'(x + \Theta h)$ его значеніе, выводимое, какъ и раньше, изъ (38), затѣмъ умножимъ на h^p, чтобы получить Mh^p или R_n, и мы получимъ формулу Роша:

$$(40) \qquad R_n = \frac{h^p(h - \Theta h)^{n+1-p}}{1.2.3\ldots n.p} f^{(n+1)}(x + \Theta h) \text{ *)}.$$

Формула Коши (39) выводится отсюда, если придать p наименьшее возможное цѣлое значеніе 1, а формула Лагранжа (34), если придать p значеніе $n+1$, которое заставляетъ множителей $h - \Theta h$ уничтожиться

* Эта форма остатка принадлежитъ и Шлёмильху.

95. — Формула и серія Макъ-Лорэна: разложеніе e^x, $\cos x$ и $\sin x$.

Формула (32) Тэйлора дастъ формулу Макъ-Лорэна, если считать увеличенія h, начиная съ нулевого значенія перемѣннаго, беря такимъ образомъ $x=0$. Если замѣнить затѣмъ h буквой x, сдѣлавшейся свободной, то мы получимъ

$$(41)\quad f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(0)+R_n.$$

Выраженія, (33), (34), (39), (40), R_n преобразуются подобнымъ образомъ. Напр., первое (33) и выраженіе Коши (39) дѣлаются, одна

$$(42)\qquad R_n=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(\Theta x)-f^{(n)}(0)],$$

а другая

$$(43)\qquad R_n=\frac{(x-\Theta x)^n}{1.2.3\ldots n}xf^{(n+1)}(\Theta x).$$

Наконецъ, вторая часть формулы (41) получаетъ названіе *серіи Макъ-Лорэна,* когда заставляютъ n неопредѣленно увеличиваться и когда R_n стремится къ нулю, а это, очевидно, бываетъ въ такихъ же общихъ случаяхъ, разсмотрѣнныхъ нами только что (стр. 151 и 152), какія бываютъ при второй части (32).

Итакъ, въ частности, можно будетъ разложить по формулѣ (41) три функціи e^x, $\cos x$, $\sin x$, послѣдовательныя производныя которыхъ, т.-е e^x для первой функціи, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, $\cos x,\ldots$ для второй и $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x,\ldots$ для третьей, не увеличиваются по мѣрѣ увеличенія ихъ порядка. Эти производныя обращаются соотвѣтственно, при $x=0$, въ 1; $0, -1, 0, 1,\ldots$; $1, 0, -1, 0,\ldots$, поэтому получаются

$$(44)\qquad \begin{cases} e^x=1+\dfrac{x}{1}+\dfrac{x^2}{1.2}+\dfrac{x^3}{1.2.3}+\cdots, \\ \cos x=1-\dfrac{x^2}{1.2}+\dfrac{x^4}{1.2.3.4}-\cdots \\ \sin x=\dfrac{x}{1}-\dfrac{x^3}{1.2.3}+\dfrac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots \end{cases}$$

Первая серія тождественна (13) стр. 45. Вторая же и третья выведены во II части въ началѣ курса посредствомъ спеціальныхъ пріемовъ.

Мы вывели формулу Макъ-Лорэна изъ формулы Тэйлора; но, обратно, можно вывести послѣднюю формулу изъ первой. Разложимъ, дѣйствительно, по этой послѣдней (41), слѣдуя степенями x'а, функцію формы $\varphi(a+x)$, которая, вполнѣ завися отъ x, можетъ быть названа черезъ $f(x)$. Изъ $f(x)=\varphi(a+x)$, посредствомъ послѣдовательныхъ дифференцированій, получимъ

$$f'(x)=\varphi'(a+x), \quad f''(x)=\varphi''(a+x), \text{ ect.};$$

отсюда

$$f(0)=\varphi(a), \quad f'(0)=\varphi'(a), \quad f''(0)=\varphi''(a), \ldots,$$

$$f^{(n)}(\Theta x)=\varphi^{(n)}(a+\Theta h).$$

Поэтому вмѣсто (41) и (42) мы будемъ имѣть

$$\begin{cases} \varphi(a+x)=\varphi(a)+\frac{x}{1}\varphi'(a)+\frac{x^2}{1\cdot 2}\varphi''(a)+\cdots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(a)+R_n, \\ R_n=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}[\varphi^{(n)}(a+\Theta x)-\varphi^{(n)}(a)], \end{cases}$$

чтò, исключая измѣненія f въ φ, x въ a и h въ x, вполнѣ — формулы (32) и (33).

Такимъ образомъ, двѣ формулы Тэйлора и Макъ-Лорэна имѣютъ одинаковое значеніе; это — два различныхъ выраженія одного и того же соотношенія.

97. — Примѣненіе серіи Макъ-Лорэна къ разложенію $(a+b)^m$, т.-е. къ обобщенной формулѣ бинома.

Одинъ изъ наиболѣе важныхъ примѣровъ, который можетъ дать употребленіе серій Тэйлора или Макъ-Лорэна въ случаѣ увеличеній h или x замѣтной величины, есть разложеніе, по формулѣ бинома, $(a+b)^m$, когда показатель m перестаетъ быть цѣлымъ и положительнымъ. Вообще, это разложеніе по восходящимъ степенямъ b остается возможнымъ, т.-е. сходящимся, только тогда, когда для b выберутъ наименьшее (по абсолютной величинѣ) изъ двухъ частей выраженія $a+b$. По тому, чтò уже доказано въ алгебрѣ для случая цѣлаго m, это будетъ.

$$(47) \quad \begin{cases} (a+b)^m=a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}b+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2+\cdots \\ \quad +\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-n+1}{n}a^{m-n}b^n+\cdots \end{cases}$$

Но если только m отрицательно или дробно, то ни одинъ изъ множителей m, $m-1$, $m-2$ .. не есть нуль и не заставляетъ уничтожаться

члены, гдѣ онъ фигурируетъ, т.-е. всѣ тѣ, которые идутъ по извѣстному порядку; отсюда слѣдуетъ, что выраженіе уже не оканчивается и перестаетъ быть простымъ полиномомъ, могущимъ сдѣлаться серіей. Поэтому-то равенство этой серіи $(a+b)^m$ и надо доказать.

Для этой цѣли, если назвать черезъ x отношеніе $\frac{b}{a}$, заключающееся по условію между -1 и $+1$, и если формулу (47), раздѣливъ обѣ ея части на a^m, взять въ видѣ

$$(48) \quad \begin{cases} (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}x^2 + \dots \\ \qquad + \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-n+1}{n}x^n + \dots, \end{cases}$$

то мы можемъ задать себѣ вопросъ, не дастъ ли точно этой формулы (48) серія Макъ Лорэна, если въ ней взять $f(x)=(1+x)^m$? Изъ $f(x)=(1+x)^m$ дифференцированіе выводитъ

$$\begin{cases} f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \\ f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \\ f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}, \\ f^{(n+1)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n)(1+x)^{m-n-1}, \end{cases}$$

а отсюда, въ виду того, что $f(0)=1$, получается

$$\begin{cases} f(0)=1,\ f'(0)=m,\ f''(0)=m(m-1),\ f'''(0)=m(m-1)(m-2),\dots \\ \qquad f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+1) \end{cases}$$

и также, если взять остатокъ R_n по формулѣ (43) Коши,

$$f^{(n+1)}(\theta x) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n)\frac{(1+\theta x)^{m-1}}{(1+\theta x)^n}.$$

Итакъ, съ одной стороны мы видимъ, что эти значенія, введенныя во вторую часть (31), даютъ вполнѣ для $(1+x)^m$ желаемое разложеніе (48), а съ другой стороны мы видимъ, что выраженіе (43) дополнительнаго члена R_n можетъ быть написано, группируя надлежащимъ образомъ множители, въ видѣ

$$(49) \quad R_n = [mx(1+\theta x)^{m-1}]\left(\frac{m-1}{1}\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)\left(\frac{m-2}{2}\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)\cdots\left(\frac{m-n}{n}\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)$$

Поэтому достаточно доказать, что этотъ остатокъ стремится къ нулю, когда n неопредѣленно увеличивается.

Но множитель $mx(1+\Theta x)^{m-1}$ здѣсь заключается между двумя значеніями, которыя онъ получаетъ при двухъ предѣлахъ $\Theta=0$, $\Theta=1$, значеніями, которыя суть mx, $mx(1+x)^{m-1}$ и которыя всегда конечны (даже второе, гдѣ показатель $m-1$ можетъ быть даже отрицательнымъ, но гдѣ $1+x$, по условію превосходитъ нуль). Такимъ образомъ, этотъ первый множитель не помѣщаетъ R_n стремиться къ нулю, при возрастающемъ n, если произведеніе прочихъ множителей стремится къ нулю. Но эти прочіе множители суть формы

$$\frac{m-i}{i}\,\frac{x-\Theta x}{1+\Theta x} \quad \text{или} \quad -\left(1-\frac{m}{i}\right)\frac{x-\Theta x}{1+\Theta x},$$

съ i, равнымъ послѣдовательно $1, 2, 3, \ldots, n$. Какъ только i дѣлается довольно большимъ по отношенію къ m, ихъ абсолютное значеніе отличается какъ угодно мало отъ значенія дроби $\frac{x-\Theta x}{1+\Theta x}$; а кромѣ того легко понять, что сама эта дробь всегда заключается между 0 и x. Дѣйствительно, въ случаѣ положительнаго x, разность, сама положительная, $x-\Theta x$, уже меньшая, чѣмъ x, дѣлается еще меньшей, когда ее раздѣлять на число $1+\Theta x$, въ этомъ случаѣ большее единицы. А въ противоположномъ случаѣ отрицательнаго x, если обозначить черезъ z его абсолютную величину, меньшую единицы, то величина $\frac{x-\Theta x}{1+\Theta x}$, выражаемая, очевидно, черезъ $\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z}$, не достигаетъ z, который отличается отъ нея на

$$z-\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z}=\frac{(z-\Theta z^2)-(z-\Theta z)}{1-\Theta z}=\frac{\Theta z(1-z)}{1-\Theta z},$$

количество вполнѣ положительное. Итакъ, когда i дѣлается довольно большимъ, отношеніе множителя $\frac{m-i}{i}\,\frac{x-\Theta x}{1+\Theta x}$ къ x, не можетъ, по абсолютной величинѣ, превышать единицу, а если это и есть, то превышаетъ единицу самое большее какъ на уничтожающееся количество, долженствующее быть меньшимъ, чѣмъ сколь угодно малый предѣлъ ε. Вслѣдствіе этого произведеніе неопредѣленно увеличивающаго числа p подобныхъ множителей, по абсолютной величинѣ, меньше x^p или, по крайней мѣрѣ, p-ной степени количества $x(1-\varepsilon)$, равнымъ образомъ заключеннаго между -1 и $+1$, степени, стремящейся къ нулю. Такимъ образомъ R_n, произведеніе подобныхъ множителей на ограниченное число прочихъ предѣльныхъ множителей, какъ $mx(1+\Theta x)^{m-1}$

и $\frac{m-1}{1}\frac{x-\theta x}{1+\theta x}$, $\frac{m-2}{2}\frac{x-\theta x}{1+\theta x}$, ..., не можетъ переставать безконечно приближаться къ нулю, когда n дѣлается очень большимъ, а поэтому формулы (47) или (48) вполнѣ доказаны.

Если ихъ примѣнить, напр. къ извлеченію въ видѣ серіи двухъ корней $\sqrt{\frac{1}{1-u}}$ и $\sqrt{1-u}$, которыя можно написать въ видѣ $(1-u)^{\mp\frac{1}{2}}$, то можно положить въ (48) $m=\mp\frac{1}{2}$ и $x=-u$, предполагая, по крайней мѣрѣ, что абсолютное значеніе u не достигаетъ единицы. Коэффиціенты $\frac{m}{1}$, $\frac{m-1}{2}$, ..., $\frac{m-n+1}{n}$ будутъ въ первомъ случаѣ

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \ldots, \quad \frac{2n-1}{2n}$$

и во второмъ

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \ldots, \quad \frac{2n-3}{2n}.$$

Кромѣ того всѣ члены обѣихъ серій, начиная со второго, имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ; дѣйствительно, при переходѣ отъ одного члена къ другому будетъ вставляться еще два множителя со знакомъ —, именно новый коэффиціентъ и новый множитель x или $-u$. Тогда легко получится, если результатамъ придать наиболѣе симметричныя формы.

$$(50)\quad \begin{cases} (\text{при } u^2<1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-u}}=1+\dfrac{1}{2}\,u+\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\,u^2+\cdots+\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\,u^n+\cdots \\ \sqrt{1-u}=1-\dfrac{1}{2}\dfrac{u}{1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{u^2}{3}-\cdots-\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\dfrac{u^n}{2n-1}-\cdots \end{cases}$$

ГЛАВА VIII.

родолженіе аналитическихъ примѣненій дифференціальнаго исчисленія: общая теорія максимальныхъ или минимальныхъ значеній функцій; задача Фермата, и т. д.; *методъ наименьшихъ квадратовъ; относительныя maxima и minima.

99. — Maxima или minima функцій и ихъ наибольшія или наименьшія значенія.

Если дана функція какого-либо числа перемѣнныхъ x, y, z,..., то говорятъ, что одно изъ ея значеній, $f(x, y, z,...)$, есть *maximum*, когда оно превосходитъ всѣ сосѣднія значенія $f(x+h, y+k, z+l,...)$, получающіяся отъ приданія соотвѣтствующимъ перемѣннымъ сколь угодно слабыхъ положительныхъ или отрицательныхъ увеличеній h, k, l,..., но взаимныя отношенія которыхъ — произвольны. Напротивъ, разсматриваемое значеніе $f(x, y, z,...)$ будетъ *minimum*, если оно меньше, чѣмъ всякое самое сосѣднее значеніе $f(x+h, y+k, z+l,...)$. Напр. функція $f(x)$ одного только перемѣннаго дѣлается maximum, когда она лежитъ въ точкѣ, съ которой послѣ увеличенія начинается уменьшеніе, или когда ея настоящее значеніе $f(x)$ превосходитъ въ одно и то же время и предыдущее очень сосѣднее значеніе $f(x-\varepsilon)$ и послѣдующее $f(x+\varepsilon_1)$; она дѣлается, точно такъ же, minimum, когда, напротивъ, она хочетъ увеличиваться послѣ уменьшенія, или когда ея настоящее значеніе меньше какъ предыдущаго значенія $f(x-\varepsilon)$, такъ и послѣдующаго $f(x+\varepsilon_1)$.

Предположимъ, что PQ (fig. 13) есть кривая, представляющая функціей $y=f(x)$. ея maxima получаются при значеніяхъ $x=OB'$, $x=OD'$ перемѣннаго и будутъ ординатами $y=B'B$, $y=D'D$; а ея minima происходятъ при $x=OC'$, $x=OE'$ и будутъ $y=C'C$, $y=E'E$.

Но, не смотря на все это, minimum можетъ быть больше, чѣмъ maximum; такъ напр. minimum $E'E$ бо́льше maximum'а $B'B$; съ другой стороны, значенія, которыя — ни maximum, ни minimum, могутъ быть или бо́льшими, чѣмъ наибольшій изъ maximum'овъ какъ напр. $y=G'G$, или меньшими, чѣмъ наименьшій изъ minimum'овъ какъ напр. на фигурѣ отрицательная ордината $y=-OA$.

Довольно часто случается, что независимыя перемѣнныя въ данномъ вопросѣ не выходятъ изъ извѣстныхъ предѣловъ, хотя функція и могла бы продолжать существовать внѣ ихъ.

Если напр. разсматривать разстояніе отъ начала прямоугольныхъ координатъ x и y до различныхъ точекъ (x, y) окружности радіуса r, имѣющей свой центръ на оси x'овъ, то его квадратъ x^2+y^2 есть извѣстная функція x'а, нужныя значенія которой всѣ приходятся между двума предѣлами $x=a\mp r$, гдѣ a обозначаетъ абсциссу центра, такъ какъ

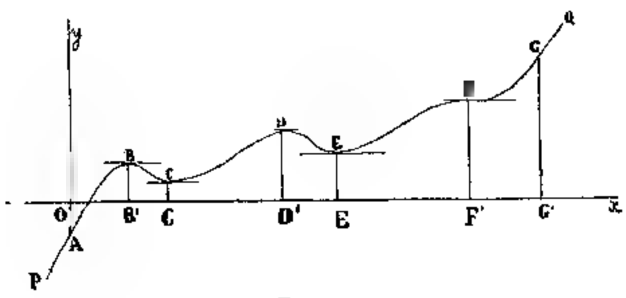


Fig. 13.

кругъ не имѣетъ никакой точки внѣ этихъ предѣловъ, но въ то же время по уравненію $(x-a)^2+y^2=r^2$ круга выраженіе этого квадрата x^2+y^2 есть линейная функція r^2-a^2+2ax, которую ничто не помѣшаетъ продолжать фиктивно въ одну сторону отъ значенія $x=a-r$ до $x=-\infty$ и въ другую отъ значенія $x=a+r$ до $x=+\infty$.

Важно замѣтить, что въ такихъ случаяхъ наибольшее и наименьшее изъ разсматриваемыхъ значеній функціи обязательно должны быть maximum'омъ или minimum'омъ только тогда, когда онѣ получаются внутри предѣловъ; вслѣдствіе этого можно, не выходя изъ послѣднихъ, заставлять независимыя перемѣнныя варіировать очень мало, во всѣхъ смыслахъ, въ ту и въ другую сторону отъ ихъ значеній, дающихъ наибольшее или наименьшее искомое значеніе функціи. Но когда, напротивъ, это происходитъ при самихъ предѣлахъ, то ничто не говоритъ, что функція не могла бы или еще увеличиваться, или уменьшаться, если бы она вышла изъ предѣловъ; поэтому искомое значеніе, вообще, не есть ни maximum, ни minimum. Такимъ образомъ, въ кривой PQ (fig. 13), ординаты $-OA$ и $G'G$, не будучи ни minima, ни maxima, соотвѣтственно наименьшая и наибольшая изъ ординатъ, заключенныхъ между предѣлами $x=0$ и $x=OG'$.

Итакъ можно сказать слѣдующее правило:

Наименьшее и наибольшее значеніе безпрерывной функціи должно искаться или между ея minima и ея maxima, или между значеніями, которыя эта функція принимаетъ на границахъ пространства, въ которомъ движутся ея перемѣнныя. Если требуется найти, напр., крат-

чайшую и длиннѣйшую изъ прямыхъ, которыя можно провести отъ начала координатъ до окружности, имѣющей уравненіемъ $(x-a)^2+y^2=r^2$, то надо только замѣтить, что квадратъ x^2+y^2 этихъ прямыхъ, выражающійся линейной функціей, не перестающей перемѣняться въ одномъ и томъ же смыслѣ, r^2-a^2+2ax, — не имѣетъ ни minimum'а, ни maximum'а, и что, слѣдовательно, требуемыя значенія — именно тѣ, которыя получаетъ функція при двухъ предѣлахъ $x=a\mp r$, между которыми варіируетъ x.

100. — Общая теорія maxima и minima функцій одного только перемѣннаго: правила Фермата и Кеплера.

По ту и другую сторону значенія x, которое дѣлаетъ функцію minimum'омъ или maximum'омъ, эта функція $y=f(x)$ уменьшается въ случаѣ maximum'а и увеличивается въ случаѣ minimum'а, такъ что она переходитъ два раза, въ сосѣдствѣ, черезъ одну и ту же величину, именно при двухъ безконечно сосѣднихъ значеніяхъ $x-\varepsilon$ и $x+\varepsilon_1$ перемѣннаго, изъ которыхъ одно, $x-\varepsilon$, меньше, а другое, $x+\varepsilon_1$, больше искомаго значенія x. Обратно, такъ какъ данная функція $f(x)$ никогда, такъ сказать, не остается постоянной между двумя различными (даже безконечно-сосѣдними) значеніями перемѣннаго, то равенство двухъ послѣдовательныхъ значеній $f(x-\varepsilon)$ и $f(x+\varepsilon_1)$ функціи есть признакъ, достаточный для того, чтобы показать, что эта функція въ интервалѣ получаетъ увеличеніе вслѣдъ за уменьшеніемъ или уменьшеніе вслѣдъ за увеличеніемъ, т.-е. получаетъ maximum или minimum. Поэтому въ разсматриваемомъ, очень маломъ, интервалѣ можно допустить безпрерывность функціи и ея ясное опредѣленіе, т.-е единичность серіи ея значеній между $f(x-\varepsilon)$ и $f(x+\varepsilon_1)$. При такихъ условіяхъ можно высказать слѣдующій принципъ, выведенный въ срединѣ XVII столѣтія французскимъ геометромъ Ферматомъ и, немного позднѣе его, Гюйгенсомъ: *значеніе перемѣннаго, которое дѣлаетъ maximum'омъ или minimum'омъ функцію $y=f(x)$, есть то, которое заключается между двумя безконечно-сосѣдними значеніями, дающими функціи одну и ту же величину.* Иначе говоря, если, придавая функціи y увеличивающійся или уменьшающійся рядъ значеній, получимъ, что уравненіе $y=f(x)$, рѣшенное по отношенію къ x, имѣетъ два все менѣе и менѣе отличающіеся другъ отъ друга корня, такъ что разность между ними стремится къ нулю, — то промежуточный общій предѣлъ x, въ который они хотятъ обратиться, есть значеніе перемѣннаго, при которомъ получается maximum или minimum, послѣдній членъ разсматриваемаго увеличающагося или уменьшающагося ряда значеній y.

Допустимъ напр., что уравненіе $y=f(x)$ есть уравненіе второй степени по отношенію къ x. Тогда искомое равенство двухъ корней, очевидно,

получится отъ уничтоженія радикала съ двумя знаками формы $\pm\sqrt{\varphi(y)}$, къ которому приводитъ рѣшеніе этого уравненія, и maxima или minima y'а будутъ даны, слѣдовательно, соотношеніемъ $\varphi(y)=0$. Но такъ какъ x, а слѣдовательно и $\varphi(y)$ предположены безпрерывными, то эти значенія y, уничтожающія $\varphi(y)$, отдѣляютъ на оси y'овъ, гдѣ будутъ проектироваться различныя точки кривой $y=f(x)$, — мѣста, въ которыхъ функція $\varphi(y)$ — положительна и радикалъ $\sqrt{\varphi(y)}$ — дѣйствителенъ, отъ тѣхъ, въ которыхъ она отрицательна и, такъ какъ радикалъ $\sqrt{\varphi(y)}$ — мнимъ, ордината y не можетъ быть опредѣлена при какомъ-либо *дѣйствительномъ* значеніи x'а. Итакъ, въ простомъ случаѣ уравненія второй степени по x существуетъ явное согласіе между общимъ принципомъ Фермата и методомъ, который данъ спеціально для этого случая въ элементарной алгебрѣ и который состоитъ въ исканіи, при какихъ предѣлахъ подкоренное количество не дѣлается отрицательнымъ.

Введемъ обозначеніе производной въ принципъ Фермата или Гюйгенса, выражающійся формулой $f(x+\varepsilon_1)-f(x-\varepsilon_1)=0$; но допустимъ сначала, что функція $y=f(x)$ имѣетъ свои послѣдовательныя производныя безпрерывными вплоть до наиболѣе возвышенной изъ тѣхъ, которыя должны быть разсматриваемы. Тогда, если заставить ε и, слѣдовательно, ε_1 стремиться къ нулю, то нулевое отношеніе $\frac{f(x+\varepsilon_1)-f(x-\varepsilon)}{(x+\varepsilon_1)-(x-\varepsilon)}$, которое есть отношеніе двухъ одновременныхъ увеличеній функціи и ея перемѣннаго, очевидно, можетъ представлять съ соотвѣтствующей производной $f'(x-\varepsilon)$ только уничтожающуюся разность, вслѣдствіе чего въ предѣлѣ получается $f'(x)=0$. Такимъ образомъ, *отклоненіе $f'(x)$ функціи уничтожается въ моменты maximum'а и minimum'а;* это вполнѣ будутъ доказывать, на предыдущей кривой PQ, касательныя, проведенныя въ точкахъ B, C, D, E. Если кромѣ того случится, что производная $f'(x)$ есть предѣлъ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ или $\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то уничтоженіе ея приводитъ къ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$ крайне малому количеству ε; а это означаетъ, что *въ моментъ, когда функція дѣлается maximum или minimum, всякое очень малое, положительное или отрицательное увеличеніе, придаваемое къ перемѣнному, заставляетъ эту функцію получать только несравненно еще меньшее увеличеніе;* или, короче, *функція не имѣетъ замѣтныхъ варіированій вблизи своего maximum'а или minimum'а.*

Подъ этой, немного обобщенной, формой, заключающейся въ томъ, что пишутъ $f'(x)=0$ или $\Delta f(x)=\varepsilon\Delta x$ вмѣсто $\Delta f(x-\varepsilon)=0$, принципъ Фермата есть одинъ изъ самыхъ важныхъ принциповъ натуральной философіи, а его крайняя простота заставляетъ знать его или, по крайней мѣрѣ, постоянно сталкиваться съ нимъ; но Кеплеръ, первый, формулировалъ его довольно точно въ началѣ XVII вѣка, почему этотъ прин-

ципъ и заслуживаетъ названія принципа Кеплера. Однако онъ не выражаетъ такъ же хорошо, какъ подъ своей первой формой $\Delta f(x-\varepsilon)=0$ или $f(x+\varepsilon_1)=f(x-\varepsilon)$, достаточное условіе maximum'а или minimum'а, но лишь условіе необходимое; дѣйствительно, можетъ, какъ исключеніе, случиться, какъ въ точкѣ F (fig 13), что отклоненіе y' функціи уничтожается безъ измѣненія знака, или что функція не перестаетъ либо увеличиваться, либо уменьшаться въ моментъ, когда ея варіированія дѣлаются несравненно болѣе слабыми, чѣмъ въ другомъ мѣстѣ; и тогда эта функція, не проходя два раза черезъ одно и то же значеніе, не есть ни maximum, ни minimum.

Итакъ, къ условію $f'(x)=0$ надо прибавить другія, чтобы вполнѣ выразить maximum или minimum. Для этого разсмотримъ вторую производную $f''(x)$. Вообще она отличается отъ нуля въ моментъ, когда первая производная $f'(x)$ уничтожается; послѣдняя же, при уменьшеніи, когда $f''(x)$ — отрицательна, при увеличиваніи, когда $f''(x)$ — положительна, дѣлается, въ первомъ случаѣ, изъ положительной — отрицательною, и во второмъ изъ отрицательной — положительною, въ моментъ, когда она — нуль. Итакъ, данная функція $f(x)$ перестаетъ тогда или увеличиваться, или уменьшаться, и имѣемъ тогда $f(x-\varepsilon)<f(x)>f(x+\varepsilon_1)$ въ первомъ случаѣ, и $f(x-\varepsilon)>f(x)<f(x+\varepsilon_1)$ во второмъ. Такимъ образомъ, *данная функція $f(x)$ въ моментъ, когда ея первая производная уничтожается, есть maximum или minimum, смотря по тому, имѣетъ ли она свою вторую производную $f''(x)$ отрицательною или положительною.*

Но что происходитъ, когда эта вторая производная $f''(x)$ есть дѣйствительно нуль, какъ и первая $f'(x)$? Maximum или minimum, существующіе при томъ необходимомъ и достаточномъ условіи, что первая производная $f'(x)$ переходитъ изъ положительной въ отрицательную или изъ отрицательной въ положительную и, слѣдовательно, находится въ періодѣ или уменьшенія, или увеличенія, — заставляютъ сказать, очевидно, что вторая производная $f''(x)$, въ данномъ случаѣ нулевая по предположенію, должна оставаться или отрицательной, или положительной во всякомъ сосѣдствѣ, т.-е. быть самой maximum'омъ или minimum'омъ, какъ $f(x)$. Поэтому ея собственная первая производная $f'''(x)$ должна уничтожаться, а ея вторая производная $f^{(IV)}(x)$ быть либо отрицательной въ случаѣ maximum'а и положительной въ случаѣ minimum'а, либо быть самой maxima или minima, если она точно нуль. Переходя, въ этомъ послѣднемъ случаѣ къ слѣдующимъ производнымъ $f^{(V)}(x)$, $f^{(VI)}(x)$ и продолжая точно такъ же далѣе, мы увидимъ, что вопросъ о томъ, даетъ ли разсматриваемое значеніе x'а, корень уравненія $f'(x)=0$, maximum или minimum для $f(x)$, будетъ рѣшенъ, если только это значеніе, введенное въ послѣдовательныя производныя $f''(x)$, $f'''(x)$,... не уничтожаетъ ихъ всѣ. Тогда, дѣйствительно, если первая изъ этихъ производныхъ, которая будетъ отличаться отъ нуля, будетъ четнаго порядка, то всѣ

предыдущія производныя, одинаково четнаго порядка, вплоть до предложенной функціи (которую можно разсматривать, какъ ея собственную производную нуленого порядка), будутъ maxima или minima, т.-е. maxima, когда эта первая производная, отличающаяся отъ нуля, будетъ отрицательна, minima, когда она — положительна. И если, наоборотъ, первая изъ производныхъ, которая будетъ отличаться отъ нуля, будетъ нечетнаго порядка, то предыдущая производная четнаго порядка не будетъ ни maximum, ни minimum; а это помѣшаетъ всѣмъ менѣе возвышеннымъ производнымъ одного и того же вида четности, вплоть до самой функціи $f(x)$, быть maximum или minimum

Какъ мы уже говорили, обыкновенно, разсматриваютъ только вторую производную $f''(x)$, и она есть maximum или minimum, смотря по тому, будетъ ли ея настоящее значеніе отрицательнымъ или положительнымъ. Очень часто простой бѣглый взглядъ на вопросъ показываетъ уже существованіе maximum'а или minimum'а и къ чему изъ нихъ стремится разсматриваемая функція. Тогда, слѣдовательно, надо только посредствомъ уравненія $f'(x) = 0$ вычислить точное значеніе x'а, при которомъ это происходитъ, и затѣмъ ея собственное значеніе $f\,x)$.

Но это предполагаетъ безпрерывность производной $f'(x)$. Когда послѣдней случается рѣзко измѣниться, то надо посмотрѣть, не измѣняетъ ли она въ эти моменты знакъ; такъ какъ ясно, что тогда, смотря по тому, переходитъ ли она, при увеличивающихся значеніяхъ x'а, изъ положительной въ отрицательную или изъ отрицательной въ положительную, — функція $f(x)$ перестанетъ или увеличиваться, или уменьшаться и будетъ представлять maximum или minimum. Но такъ какъ чаще всего прерывность функціи, какъ $f'(x)$, зависитъ отъ существованія въ ея выраженіи знаменателя, который уничтожаясь дѣлаетъ ее безконечной, то всѣ соотвѣтствующія значенія x'а даны будутъ уравненіемъ $f'(x) = \pm\infty$, т.-е. $\frac{1}{f'(x)} = 0$. Поэтому можно рѣшать послѣднее; послѣ этого смотрятъ, измѣняетъ ли или нѣтъ знакъ отклоненіе $f'(x)$ при найденномъ корнѣ x: въ первомъ случаѣ, кривая, представляемая функціей (предполагаемой всегда вполнѣ опредѣленной) $y = f(x)$, будетъ имѣть одну изъ формъ IMJ, $I_1M_1J_1$, дающихъ мѣсто ординатѣ — maxima $y = M'M$ или ординатѣ — minima M'_1M_1; напротивъ, во второмъ случаѣ, ея формой будетъ HNK или H_1K_1;

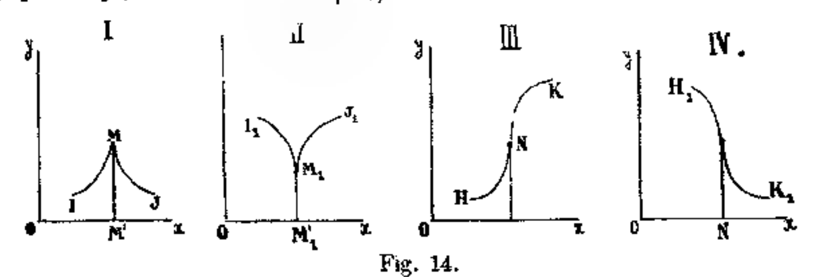


Fig. 14.

и отклоненіе, всегда дѣлающееся безконечнымъ въ N или N_1, будетъ сохранять свой знакъ, вслѣдствіе чего соотвѣтствующая ордината $N'N$, N'_1N_1 не будетъ ни maxima, ни minima.

Часто можно, не безпокоясь узнавать, будетъ ли производная $f'(x)$ безпрерывна или прерывна, и даже не образуя выраженія $f'(x)$'а, удовольствоваться примѣненіемъ чисто геометрическимъ путемъ общаго правила Фермата, выражая на фигурѣ рѣшаемой задачи равенство двухъ безконечно сосѣднихъ значеній функціи и выводя изъ этого равенства какое-либо простое слѣдствіе, которое позволитъ *построить* искомый maximum или minimum. Два слѣдующіе примѣра, которыми я и ограничусь, покажутъ, какъ это производится.

101. — Первый примѣръ: минимальное разстояніе отъ точки до кривой.

Даны: какая-либо линія BC, точка A, лежащая гдѣ-либо внѣ ея, и движущаяся прямая AM, проведенная отъ этой точки до линіи BC и опредѣляющаяся дугой $BM = s$, которая измѣряетъ на кривой разстояніе отъ ея перемѣннаго конца M до неподвижнаго начала B; требуется построить эту прямую въ положеніи AN, гдѣ она была бы кратчайшей. Дѣло идетъ, слѣдовательно о полученіи minimum'а длины AM, которая, очевидно, есть извѣстная геометрическая, вполнѣ безпрерывная, функція $f(s)$ *криволинейной абсциссы* s: если напримѣръ кривая BC направляетъ свои стороны B и C въ безконечность, то $f(s)$ сперва, начиная съ ∞, уменьшается, чтобы затѣмъ начать неопредѣленно увеличиваться, когда s увеличивается съ $-\infty$ до $+\infty$; поэтому minimum вполнѣ существуетъ. Чтобы опредѣлить его, возьмемъ на кривой, съ той и другой стороны точки N, которая опредѣляетъ его, двѣ безконечно-сосѣднія точки m и m', такія, что, въ виду принципа Фермата, два соотвѣтствующія значенія Am и Am' функціи будутъ равны. Безконечно-малая хорда mm' можетъ, по направленію, быть сравниваема съ касательной, проходящей или въ m, или въ N. Но въ равнобедренномъ треугольникѣ mAm' углы при основаніи m или m', дополнительные половины безконечно-малаго угла при вершинѣ A, не отличаются въ предѣлѣ отъ прямого, и, слѣдовательно, стороны Am и Am', когда онѣ близятся къ совпаденію съ AN, дѣлаются перпендикулярными къ касательной въ N. Такимъ образомъ, *искомое наикратчайшее разстояніе есть нормаль, проведенная отъ A къ кривой.*

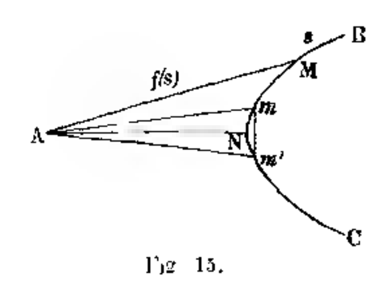


Fig. 15.

Точно такъ же можно доказать, что, *когда существуетъ прямая минимальной длины между точкой и кривой, то эта прямая есть нормаль къ кривой.*

02. — Второй примѣръ: задача Ферма относительно преломленія свѣта; законъ экономіи или наименьшаго разстоянія.

Ферматъ, чтобы дать себѣ отчетъ о явленіяхъ отраженія и преломленія, допустилъ, что *свѣтъ, проходя отъ одной точки до другой, выбираетъ путь, способный быть пройденнымъ въ возможно меньшій промежутокъ времени;* и это правильно было подтверждено теоріей свѣтовыхъ волнъ. Дѣйствительно, можно понять, что между всѣми колебательными движеніями, происходящими отъ одной точки до другой и проходящими черезъ различныя среды или по различнымъ путямъ, — движеніями, большее или меньшее различіе которыхъ въ точкѣ прибытія зависитъ отъ интервала ихъ отправленій, который измѣряется разностью времени, употребленнаго на прохожденіе, — самыми быстрыми будутъ единственно тѣ, которыя существуютъ въ этой точкѣ прибытія или которыя находятся въ достаточно большомъ числѣ и согласны между собой для того, чтобы не быть вполнѣ нейтрализованными другими обратнаго смысла; дѣйствительно, въ виду quasi-неизмѣняемости вблизи minimum'а функціи, выражающей продолжительность путей, — движенія, происходящія по сосѣднимъ путямъ наименьшаго пробѣга, очень замѣтно требуютъ одного и того же промежутка времени для своего пробѣга; слѣдовательно, они менѣе другихъ несходны между собою или составляютъ въ совокупности группу, отъ которой остается еще кое-что послѣ взаимной нейтрализаціи остатка совокупности. Поэтому-то ихъ только и разсматриваютъ, согласно съ вышеизложеннымъ принципомъ экономіи времени.

Ферматъ пришелъ къ этому простому принципу, замѣтивъ сначала, что онъ удовлетворяетъ прохожденію свѣта черезъ однородную среду и отраженію его на предѣльной поверхности таковой среды, — случай, гдѣ, такъ какъ скорость распространенія (функція природы среды) — постоянна, минимальная продолжительность пути соотвѣтствуетъ наикратчайшему по длинѣ пути. Но еще въ древности знали, что свѣтъ, когда проходитъ черезъ одну и ту же среду или отражается на поверхности, то выбираетъ, между двумя данными точками, одной — отправленія, другой — прибытія, минимальную траэкторію, имѣющую въ первомъ случаѣ видъ прямой линіи, а во второмъ — видъ ломаной, уголъ которой имѣетъ свою биссектрису перпендикулярною къ поверхности*). Ферматъ

*) Въ элементарной геометріи легко доказывается, по крайней мѣрѣ, когда отражающая поверхность — плоскость, что эта ломаная линія имѣетъ наименьшую длину между всѣми тѣми, которыя касаются поверхности. Чтобы видѣть это, достаточно замѣтить, что она дѣлается прямой, когда замѣняютъ ея первую сторону прямой,

при помощи индукціи примѣнялъ затѣмъ свой постулатъ экономіи времени къ *феномену преломленія*, при которомъ свѣтъ проходитъ изъ дной среды, гдѣ его скорость въ секунду имѣетъ извѣстное значеніе V, въ другую среду, гдѣ его скорость принимаетъ другое значеніе V', — и тогда уже вывелъ законы этого феномена.

Пусть даны: A — точка отправленія свѣта, B — точка прибытія, A' и B' проекціи этихъ точекъ на поверхность раздѣла этихъ средъ, предполагаемую плоскостью, и наконецъ $A'B'$ пересѣченіе этой поверхности перпендикулярной, проходящей черезъ A и B, плоскостью, плоскостью симметріи фигуры, которую образуютъ A, B и двѣ среды. Всякій путь, идущій изъ A въ B и выходящій изъ плоскости $AA'BB'$, будетъ имѣть, очевидно, въ каждой средѣ бо́льшую длину, чѣмъ его проекція на эту плоскость симметріи. Итакъ, путь минимальнаго протяженія заключенъ въ этой плоскости и образуется одной изъ ломаныхъ линій, какъ AMB, вершина M которой лежитъ на $A'B'$, линій, которыя вполнѣ опредѣляются абсциссой $OM = x$ этой точки M; эта абсцисса отсчитывается вдоль $A'B'$ съ произвольнаго начала O.

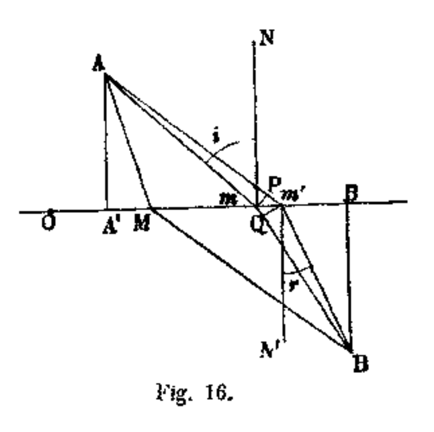


Fig. 16.

Такъ какъ соотвѣтствующій путь AM въ первой средѣ будетъ пробѣгаться со скоростью V, а путь MB во второй средѣ со скоростью V', то продолжительности этихъ частныхъ пробѣговъ будутъ равняться $\frac{AM}{V}$ и $\frac{MB}{V'}$: безпрерывная функція, которая должна получить minimum, будетъ слѣдовательно ихъ суммой $y = \frac{AM}{V} + \frac{MB}{V'}$. Можно видѣть, что этотъ minimum существуетъ; дѣйствительно, если точка M пробѣгаетъ неопредѣленную прямую OB', или если x варіируетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, то продолжительность пути, безконечная при двухъ предѣлахъ и конечная въ интервалѣ, не можетъ въ извѣстный моментъ начать увеличиваться, не уменьшаясь до этого момента.

Чтобы построить траэкторію AMB такою, какой она будетъ въ этотъ

симметричной по отношенію къ отражающей плоскости, тогда какъ всякая другая ломаная линія, прилегающая къ тѣмъ же концамъ, измѣняется отъ подобной подстановки въ другую ломаную линію, проходящую между двумя концами предыдущей линіи, и, слѣдовательно, въ болѣе длинную, чѣмъ предыдущая. Въ концѣ концовъ доказательство посредствомъ метода безконечно-малыхъ, приложеннаго далѣе къ преломленію, примѣняется безъ измѣненія и къ случаю отраженія.

моментъ, представимъ, что можно взять съ той и другой стороны ея, по принципу Фермата, двѣ безконечно сосѣднія траэкторіи AmB и $Am'B$ одинаковой протяженности. Исключивъ ихъ равныя части, получающіяся отъ построенія двухъ равнобедренныхъ треугольниковъ AmP, $Bm'Q$, для чего надо перенесть Am на Am' въ видѣ AP и Bm' на Bm въ видѣ BQ, — намъ остается сравнять часть Pm' второго пути съ частью mQ перваго для того, чтобы выразить, что разность временъ, $\frac{Pm'}{V}$ и $\frac{mQ}{V'}$, употребленныхъ на ихъ пробѣгъ, есть нуль. Уравненіе minimum'а есть, слѣдовательно,

$$\frac{Pm'}{V} = \frac{mQ}{V'}$$

Выразимъ здѣсь въ видѣ функціи безконечно-малой варіаціи mm' независимаго перемѣннаго одновременныя абсолютныя варіаціи Pm', mQ обѣихъ частей пути; а для этого замѣтимъ, что въ двухъ треугольникахъ mPm', $m'Qm$ пропорціональность синусовъ даетъ

$$Pm' = mm' \frac{\sin Pmm'}{\sin P}, \qquad mQ = mm' \frac{\sin Qm'm}{\sin Q}.$$

Послѣ уничтоженія общаго множителя mm' получится

$$\frac{\sin Pmm'}{V \sin P} = \frac{\sin Qm'm}{V' \sin Q}.$$

Но въ этомъ соотношеніи углы P и Q превосходятъ, очевидно, прямой только на половину безконечно-малыхъ угловъ при вершинѣ A, B равнобедренныхъ треугольниковъ AmP и $Bm'Q$; вслѣдствіе этого, въ предѣлѣ, $\sin P$ и $\sin Q$ обратятся каждый въ единицу. Кромѣ того, если провести въ двухъ соотвѣтственныхъ средахъ нормали mN, $m'N'$ къ ихъ поверхности раздѣла и если назвать черезъ i и r то, чѣмъ дѣлаются углы AmN, и $Bm'N'$ при одномъ и томъ же предѣлѣ, гдѣ m' и m совпадаютъ и гдѣ Am есть *падающій лучъ*, а $m'B$ — *преломившійся лучъ*, то будемъ имѣть, все въ предѣлѣ, $Pmm' = i$, $Qm'm = r$; дѣйствительно, дополнительныя, PmN, $Qm'N'$, для Pmm' и $Qm'm'$ будутъ также дополнительными для i и r, когда основанія mP и Qm' равнобедренныхъ треугольниковъ AmP, BQm' примутъ свои окончательныя направленія, перпендикулярныя къ сторонамъ, тогда совпавшимъ, проходящимъ соотвѣтственно изъ A и B. Такимъ образомъ уравненіе minimum'а есть

$$\frac{\sin i}{V} = \frac{\sin r}{V'} \quad \text{или} \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V}{V'},$$

гдѣ i и r есть два *угла*, называемые *угломъ паденія* и *угломъ преломленія*.

Но извѣстно, что эта формула точно выражаетъ экспериментальный законъ преломленія и позволяетъ построить путь, которымъ слѣдуетъ волнообразное движеніе.

Принципъ экономіи времени, безъ сомнѣнія, позволяетъ, какъ замѣтилъ Лейбницъ, сказать, что свѣтъ распространяется всегда по тому пути, который имѣетъ меньшее протяженіе; дѣйствительно, естественно предполагать протяженіе пути тѣмъ болѣе короткимъ, чѣмъ меньше все разстояніе, по которому происходитъ распространеніе. Итакъ, надо возвести въ болѣе общій принципъ принципъ *наименьшаго разстоянія* или, еще, *наименьшаго дѣйствія*, въ силу котораго феномены происходятъ при помощи наиболѣе легкихъ способовъ и соединяются такъ между собою, что производятъ въ каждое мгновеніе только тѣ явленія, которыя требуютъ наименьшихъ усилій, или которыя, при данномъ усиліи, соотвѣтствуютъ наибольшимъ дѣйствіямъ: принципъ, въ большинствѣ случаевъ, какъ и принципъ, не менѣе необходимый, простоты общихъ законовъ, — столь распространенный, что мы рѣдко знаемъ, на что природа употребила экономію и простоту, или какія необходимыя количества она взяла за minimum; но принципъ тѣмъ не менѣе основной, полезный какъ инженеру, такъ и физику и натуралисту, какъ это можно видѣть на другихъ примѣрахъ.

103. Maxima и minima функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ: общая теорія.

Всякая функція $f(x, y, z)$ нѣсколькихъ перемѣнныхъ дѣлается зависимою только отъ одного, когда она составляется извѣстнымъ, но произвольнымъ, способомъ такъ, что x, y, z варіируютъ одновременно. Поэтому, если частное значеніе $f(x, y, z)$ этой функціи или меньше, или больше всякаго сосѣдняго значенія $f(x+h, y+k, z+l)$, то оно будетъ или minimum, или maximum функціи одного только перемѣннаго, получающейся, если взять напр. одновременныя увеличения x'а, y'а, z'а съ той и другой стороны нуля постоянно пропорціональными тремъ изъ ихъ значеній, выбраннымъ произвольно, h, k, l. Чтобы пояснить это, назовемъ черезъ t вспомогательное независимое перемѣнное, черезъ H, K, L — три конечные коэффиціента такіе, которые позволяютъ, при извѣстномъ очень маломъ значеніи t, быть $Ht=h$, $Kt=l$, $Lt=l$; а функція t'а, выражающаяся черезъ $f(x+Ht, y+Kt, z+Lt)$ будетъ minimum или maximum при $t=0$, если $f(x, y, z)$ есть minimum или maximum данной функціи. Не менѣе очевидно и то, что, если обратно $f(x+Ht, y+Kt, z+Lt)$ при $t=0$ есть minimum или maximum, каковы бы ни были взаимныя отношенія H'а, K, L, и если кромѣ того протяженіе, въ которомъ функція увеличивается съ той и другой стороны minimum'а или уменьшается съ обѣихъ сторонъ maximum'а,

не обращается ни въ какомъ изъ этихъ случаевъ въ простую точку или даже не приближается неопредѣленно къ нулю, то значеніе $f(x, y, z)$ будетъ или меньше, или больше всѣхъ сосѣднихъ значеній, $f(x+h, y+k, z+l)$, получающихся отъ взятія для H, K, L частныхъ h'а, k'а, l'а на количество t одного и того же порядка малости, и что, слѣдовательно, $f(x, y, z)$ будетъ minimum или maximum. Такимъ образомъ, искать minima или maxima функціи $f(x, y, z)$ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ, — все равно, что искать, при какихъ условіяхъ происходитъ, при $t=0$, minimum или maximum функцій $f(x+Ht, y+Kt, z+Lt)$ одного только перемѣннаго t.

Остановимся на предположеніи безпрерывности частныхъ производныхъ двухъ первыхъ порядковъ функціи $f(x, y, z)$ и на обыкновенномъ случаѣ, когда разсматриваемыя maxima или minima $f(x+Ht, y+Kt, z+Lt)$ зависятъ отъ двухъ только производныхъ, первой и второй, f'а по отношенію къ t.

Въ виду линейной формы, по отношенію къ t, простыхъ функцій $x+Ht$, $y+Kt$, $z+Lt$, входящихъ въ f, эти двѣ производныя образуются по правилу № 58 (стр. 105).

Но сперва, по правилу Фермата или Кеплера, первая производная должна будетъ уничтожиться при $t=0$; *а это*, не забудемъ замѣтить, *распространяетъ, очевидно, и на функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ великій законъ ихъ quasi неизмѣняемости въ сосѣдствѣ съ minimum'омъ или maximum'омъ*. Но эта первая производная f'а по t, очевидно, при $t=0$ будетъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} H+\frac{\partial f}{\partial y} K+\frac{\partial f}{\partial z} L.$$

Приравнять ее къ нулю значитъ написать, умноживъ на t и подставивъ такимъ образомъ h, k, l вмѣсто Ht, Kt, Lt,

$$\frac{\partial f}{\partial x} h+\frac{\partial f}{\partial y} k+\frac{\partial f}{\partial z} l=0. \tag{1}$$

Кромѣ того малыя произвольныя увеличенія, положительныя или отрицательныя, h, k, l могутъ быть такъ же разсматриваемы, какъ дифференціалы независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z; тогда соотношеніе (1) сдѣлается

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx+\frac{\partial f}{\partial y} dy+\frac{\partial f}{\partial z} dz=0 \quad \text{или} \quad df=0. \tag{2}$$

Такимъ образомъ, *когда функція $f(x, y, z)$ есть maximum или minimum, ея полный дифференціалъ тождественно уничтожается при настоящихъ значеніяхъ перемѣнныхъ.*

Взаимныя соотношенія dx'а, dy, dz во (2) или h'а, k, l въ (1) произвольны, поэтому эти соотношенія предполагаютъ нулемъ каждый

изъ своихъ членовъ, въ который обратится ихъ первая часть, если выбрать соотвѣтствующее увеличеніе h, k или l отличающимся отъ нуля, а всѣ остальныя увеличенія — нулями. Одно уравненіе $df = 0$, слѣдовательно, способно уничтожить всѣ первыя частныя производныя f'а или положить между неизвѣстными x, y, z равное число соотношеній

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Слѣдовательно, эта система (3) уравненій, допускающая, вообще, для x, y, z конечное число значеній, должна быть сперва рѣшена, когда задача разсматривается аналитически. Послѣ этого не останется ничего болѣе, какъ найти, принимаетъ ли каждая изъ такимъ образомъ полученныхъ системъ значеній функцію $f(x, y, z)$ за minimum или maximum, или не беретъ ее за minimum или maximum.

По простому вышеизложенному правилу (стр. 168) узнаютъ это по знаку, который получаетъ, при $t = 0$, вторая производная $\frac{d^2 f}{dt^2}$. Но послѣдняя тогда есть

$$\left(H\frac{\partial}{\partial x} + K\frac{\partial}{\partial y} + L\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x, y, z)$$

или, если раскрыть скобки и умножить на t^2, чтобы можно было вмѣсто Ht, Kt, Lt поставить дѣйствительныя малыя увеличенія h, k, l,

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}l^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}kl + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}lh + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk.$$

Назовемъ черезъ A, B, C, D, E, F дѣйствительныя значенія соотвѣтственныхъ производныхъ, какъ прямыхъ (по x, y, z), такъ и облическихъ (по y и z, по z и x, x и y), данной функціи $f(x, y, z)$; и полиномъ (4), знакъ котораго зависитъ отъ существованія minimum'а или maximum'а, напишется короче черезъ

$$(5) \qquad Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dkl + 2Elh + 2Fhk.$$

Исключая случай, когда выраженіе (5) уничтожается безъ измѣненія знака и когда надо будетъ прибѣгнуть къ производнымъ высшаго, чѣмъ второй, порядка, мы можемъ понять, что будетъ необходимо и достаточно, чтобы при полученіи взаимными отношеніями h, k, l всевозможныхъ значеній этотъ однородный полиномъ второй степени по h, k, l былъ положительнымъ для того, чтобы онъ имѣлъ minimum, отрицательнымъ для того, чтобы имѣлъ maximum, и положительнымъ и отрицательнымъ въ одно и то же время, чтобы не имѣлъ ни maximum'а, ни minimum'а. Дѣйствительно функція $f(x + Ht,\ y + Kt,\ z + Lt)$ бу-

детъ при $t=0$ постоянно minimum'омъ въ первомъ случаѣ, maximum'омъ постоянно во второмъ и, наконецъ, въ третьемъ minimum'омъ при извѣстныхъ взаимныхъ отношеніяхъ H, K, L и maximum'омъ при другихъ, что, давая категоріи значеній $f(x+h,\ y+k,\ z+l)$ однѣ — большія $f(x,\ y,\ z)$-а, другія — меньшія значенія, помѣшаетъ $f(x,\ y,\ z)$-у въ одно и то же время быть maximum'омъ и minimum'омъ.

Итакъ вопросъ приводитъ къ нахожденію того, чѣмъ должны быть коэффиціенты A, B, C, D, E, F полинома (5) для того, чтобы этотъ полиномъ былъ или вполнѣ положительнымъ, или вполнѣ отрицательнымъ.

Для этого предположимъ его сначала вполнѣ положительнымъ и найдемъ, въ какой рядъ квадратовъ онъ можетъ разложиться. Такъ какъ, между гипотезами, которыя можно приложить къ h, k, l, есть такая, по которой одно изъ этихъ увеличеній, h напр., не будетъ уничтожаться, — то членъ Ah^2, въ который обратится тогда полиномъ, будетъ имѣть знакъ $+$. Слѣдовательно первымъ условіемъ есть $A>0$; а это позволяетъ взять A общимъ множителемъ во всѣхъ членахъ (5)-го, въ которыхъ фигурируетъ h, и раздѣлить такимъ образомъ выраженіе (5) на двѣ части, изъ которыхъ одна только,

$$A\left[h^2+2h\left(\frac{E}{A}l+\frac{F}{A}k\right)\right],$$

содержитъ h. Но достаточно прибавить къ этой первой части въ большихъ скобкахъ квадратъ отъ $\frac{F}{A}k+\frac{E}{A}l$, выраженіе такой же формы по отношенію къ k, l, какъ и вторая часть, и затѣмъ (для того, чтобы не измѣнять всего выраженія) вычесть изъ второй части произведеніе этого самаго квадрата на A, — достаточно для того, чтобы выдѣлить изъ однороднаго полинома (5) первый квадратъ, т.-е. $A\left(h+\frac{F}{A}k+\frac{E}{A}l\right)^2$; а послѣ этого остается только выраженіе

$$(6)\qquad \left(B-\frac{F^2}{A}\right)k^2+\left(C-\frac{E^2}{A}\right)l^2+2\left(D-\frac{FE}{A}\right)kl$$

такой же формы, что и данное (5), но уже безъ перемѣннаго h. Такъ какъ, кромѣ того, каковы бы ни были k и l, вполнѣ положительный полиномъ (5) обращается въ (6) по гипотезѣ $h=-\frac{F}{A}k-\frac{E}{A}l$, уничтожающей квадратъ, то этотъ новый полиномъ (6) не менѣе, чѣмъ данный (5), долженъ имѣть всѣ свои значенія положительными. Разсужденіе, тождественное предыдущему, но въ которомъ k будетъ играть роль, которую имѣло h, слѣдовательно, можетъ заставить быть $B-\frac{F^2}{A}>0$ и позволить выдѣлить изъ (6) новый квадратъ по k и l

оставляя послѣ этого сокращенія новый однородный полиномъ второй степени, вполнѣ положительный опять, но уже безъ перемѣннаго k. Точно такъ же мы прійдемъ къ тому, что останется только одно перемѣнное и, слѣдовательно, только одинъ членъ, состоящій изъ квадрата этого перемѣннаго или имѣющій (въ виду предполагаемой положительною природы его коэффиціента) самъ по себѣ желаемую форму. Назовемъ для сокращенія черезъ B', C', D' соотвѣтственные коэффиціенты, фигурирующіе въ (6), и черезъ C'' коэффиціентъ $C'-\frac{D'^2}{B'}$ при l въ слѣдующемъ выраженіи, которое будетъ здѣсь послѣднимъ; и полиномъ (5) въ желаемой формѣ будетъ

(7) $$A\left(h+\frac{F}{A}k+\frac{E}{A}l\right)^2+B'\left(k+\frac{D'}{B'}l\right)^2+C''l^2.$$

Въ концѣ концовъ мы видимъ, что условіями, необходимыми для того, чтобы былъ *minimum* $f(x, y, z)$-а, будутъ неравенства

(8) $$A>0,\quad B'>0,\quad C''>0$$

въ томъ же числѣ, въ какомъ даны сами перемѣнныя x, y, z. Кромѣ того эти условія будутъ и достаточными или будутъ заключать въ себѣ существованіе minimum'а; дѣйствительно онѣ сдѣлаютъ изъ выраженія (7), равнозначущаго (5)-му, сумму квадратовъ, обращающуюся въ нуль только при помощи отдѣльнаго уничтоженія каждаго члена-квадрата, т.-е. при немыслимомъ предположеніи

$$l=0,\quad k+\frac{D'}{B'}l=0 \text{ или } k=0,\quad h+\frac{F}{A}k+\frac{E}{A}l=0 \text{ или } h=0^{*}).$$

Въ случаѣ maximum'а можно приложить тѣ же самыя разсужденія послѣ того, какъ перемѣнимъ знаки выраженія (5), тогда вполнѣ отрицательнаго; и получимъ, слѣдовательно, какъ необходимое и достаточное условіе, три неравенства, обратныя предыдущимъ,

(9) $$A<0,\quad B'<0,\quad C''<0.$$

Наконецъ, если первыя части этихъ неравенствъ имѣютъ, однѣ — положительныя значенія, другія отрицательныя, — то, по тому же самому доказательству, эта функція $f(x, y, z)$ не будетъ ни maximum'омъ, ни minimum'омъ.

---

*) Это доказательство заставляетъ въ то же время видѣть, какимъ образомъ однородный полиномъ второй степени можетъ, если онъ всецѣло положителенъ, быть выраженъ въ формѣ суммы квадратовъ, которую надо умѣть при извѣстныхъ вопросахъ прикладной механики придавать потенціалу упругости твердаго тѣла, однородной, второй степени и вполнѣ положительной функціи шести элементарныхъ малыхъ деформацій твердаго тѣла въ разсматриваемомъ пространствѣ.

104. — Частный случай двухъ перемѣнныхъ.

Разсмотримъ въ частности и непосредственно простой случай функцiи $f(x, y)$ двухъ перемѣнныхъ. Это будетъ напр. вертикальная ордината z (или *высота*) поверхности, функцiя двухъ горизонтальныхъ прямоугольныхъ координатъ x и y. Обозначимъ, какъ въ шестой главѣ (стр. 117), черезъ p, q, r, s, t ея пять первыхъ и вторыхъ производныхъ

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Но сначала, чтобы опредѣлить значенiя x'а и y'а, способныя получить максимальную или минимальную ординату, будемъ имѣть два уравненiя $p=0$, $q=0$, которыя, согласно съ принципомъ Ферната, выражаютъ уничтоженiе *отклоненiя* $\sqrt{p^2+q^2}$ поверхности въ разсматриваемыхъ точкахъ*). Но такъ какъ выраженiе (5) приводится здѣсь къ $rh^2+2shk+tk^2$, или, если откинуть положительный множитель h^2, къ трехчлену второй степени $ty'^2+2sy'+r$, въ которомъ y' означаетъ вполнѣ произвольное отношенiе $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{k}{h}$, то этотъ трехчленъ, безпрерывная функцiя отъ y', будетъ имѣть при всѣхъ значенiяхъ y''а знакъ $+$ или $-$ своего перваго коэффицiента t, если послѣднiй никогда не переходитъ черезъ нуль, т.-е. если корни уравненiя второй степени, получающагося отъ уничтоженiя этого трехчлена, суть мнимы, или если получается

$$rt - s^2 > 0, \tag{10}$$

что, какъ мы уже знаемъ, дѣлаетъ изъ первой части уравненiя произведенiе суммы двухъ квадратовъ на ± 1. Такимъ образомъ, неравенство (10) составляетъ общее, необходимое и достаточное условiе того, что здѣсь существуетъ maximum или minimum. Когда это условiе удовлетворено, то произведенiе rt двухъ прямыхъ вторыхъ производныхъ, превосходящее квадратъ s^2 облической второй производной, положительно и двѣ прямыя вторыя производныя имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ : слѣдовательно существуетъ minimum, если онѣ положительны, maximum, если онѣ отрицательны. Напротивъ, когда r и t имѣютъ различные знаки или одинъ и тотъ же знакъ, но съ произведенiемъ, меньшимъ s^2'а, то не получается ни minimum'а, ни maximum'а, и получается поверхность, имѣющая свои сосѣднiя съ разсматриваемой (x, y, z) точки, однѣ вверху, а другiя внизу касательной горизонтальной плоскости, проходящей черезъ (x, y, z) и, слѣдовательно, пересѣкающейся съ ней. Кромѣ того, часто бываетъ, какъ и въ случаѣ одного только неза-

*) Во II части (въ № 46) доказывается, что выраженiе $\sqrt{p^2+q^2}$ въ каждой точкѣ измѣряетъ вполнѣ отклоненiе поверхности, точно то же будетъ доказано въ № 179 (формула 25).

висимаго перемѣннаго, что природа вопроса сразу показываетъ существованіе maximum'a или minimum'a, почему и становится безполезнымъ предыдущее разсужденіе; вслѣдствіе чего достаточно опредѣлить, либо по геометрическому, либо по аналитическому примѣненію принципа Фермата, положеніе, а затѣмъ и значеніе этого maximum'a или minimum'a

105. Минимальное разстояніе отъ точки до поверхности; минимальное разстояніе между двумя кривыми или поверхностями.

Прямая, которая соединяетъ неподвижную точку A съ различными точками данной поверхности SS', есть функція двухъ независимыхъ координатъ, x и y напр., ея конца, лежащаго на поверхности. Ея минимальное значеніе AM получится, по методу, указанному въ началѣ предпослѣдняго номера (стр 173), если мы будемъ разсматривать, что это значеніе будетъ одинаково minimum'омъ и во всѣхъ функціяхъ одного только перемѣннаго, выводимыхъ изъ данной по произвольному выбору способа одновременнаго варіированія x'а и y'а, способа, который будетъ выражать соотвѣтствующую кривую, CMB или EMD, etc., проходящую на поверхности черезъ точку M и представляющуюся въ проекціи на плоскости xy въ видѣ желаемаго соотношенія между x и y. Иначе говоря, AM будетъ наикратчайшимъ разстояніемъ отъ точки A до всѣхъ кривыхъ CB, ED,..., которыя пересѣкаются въ M на поверхности, и, въ виду доказаннаго выше (стр. 170) свойства этого наикратчайшаго разстоянія, оно будетъ перпендикулярно пересѣкать ихъ касательныя, проходящія въ M, мѣсто которыхъ есть (стр. 89) плоскость, касательная въ M къ поверхности. Иначе говоря, *требуемая минимальная прямая будетъ нормалью, проведенною изъ точки A къ поверхности.*

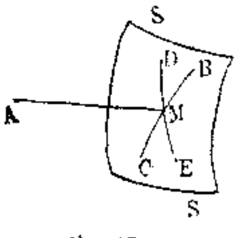


Fig 17

Теперь разсмотримъ прямую MM', соединяющую двѣ точки, соотвѣтственно взятыя на двухъ данныхъ линіяхъ AB, $A'B'$. Если взять за независимыя перемѣнныя дуги $AM = s$ и $A'M' = s'$, которыя опредѣляютъ на двухъ линіяхъ положенія M и M', то движущаяся прямая MM' будетъ функціей $f(s, s')$ этихъ двухъ дугъ и принципъ Фермата, примѣненный къ этой функціи, если заставить отдѣльно варіировать s и s', покажетъ, что минимальное разстояніе между двумя линіями измѣряется нормалью, общей обѣимъ линіямъ.

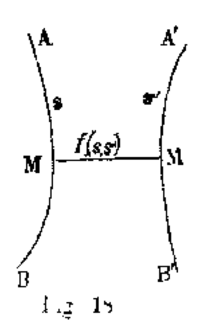


Fig 18

Точно такъ же можно понять, что наикратчайшей прямой, проходящей между линіей и поверхностью или между двумя поверхностями, будетъ нормаль, общая этимъ двумъ фигурамъ.

109. — Относительныя maxima и minima; общее правило.

Пусть дана $f(x, y, z, u, v)$ функція нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Каждый изъ ея maxim'овъ или minim'овъ, т.-е. то, что больше или меньше всѣхъ остальныхъ значеній функціи, полученныхъ отъ сосѣднихъ съ ними, но всевозможныхъ измѣненій перемѣнныхъ x, y, z, u, v, — называется *абсолютнымъ* maximum'омъ или minimum'омъ; въ противоположность имъ даютъ названіе *относительнаго* maximum'а или minimum'а значенію функціи, которое или больше или меньше извѣстныхъ только категорій сосѣднихъ значеній, варіирующихъ безпрерывно рядомъ съ нимъ, по крайней мѣрѣ, въ двухъ противоположныхъ смыслахъ. Представимъ напр., что разсматривается бóльшая или меньшая часть земной поверхности и что отправляются отъ *перевала,* т.-е. отъ точки, расположенной между двумя горами въ высшемъ началѣ двухъ долинъ противоположныхъ направленій. *Высота* (вертикальное разстояніе земной поверхности, лежащей выше неподвижной горизонтальной плоскости), очевидно, увеличивается, когда поднимаются отъ него на ту или другую изъ двухъ горъ, уменьшается, когда опускаются въ ту или другую изъ двухъ долинъ: такимъ образомъ высота на перевалѣ — ни абсолютный maximum, ни абсолютный minimum. Она будетъ относительнымъ minimum'омъ, если приходится итти, переходя черезъ перевалъ, только съ одной горы на другую; и относительнымъ maximum'омъ, если итти только изъ одной долины въ другую.

Категоріи значеній, которыми ограничиваются, опредѣляются частными способами, которыми одновременно варіируютъ x, y, z, u, v, т.-е. извѣстными соотношеніями между перемѣнными въ $f(x, y, z, u, v)$. Чтобы пояснить это, мы предположимъ эти соотношенія въ числѣ двухъ и способными быть взятыми въ видѣ

$$\varphi(x, y, z, u, v) = 0 \qquad \psi(x, y, z, u, v) = 0, \tag{34}$$

гдѣ φ и ψ обозначаютъ безпрерывныя функціи x'а, y, z, u, v, имѣющія и первыя производныя безпрерывными. Слѣдовательно, какъ только x, y, z, u, v измѣнятся, то ихъ дифференціалы должны будутъ сами удовлетворять соотношенія $d\varphi = 0$, $d\psi = 0$ или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}du + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}dv = 0 \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}dz + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}du + \dfrac{\partial\psi}{\partial v}dv = 0. \end{cases} \tag{35}$$

При такихъ условіяхъ нахожденіе относительныхъ maximum'овъ и minimum'овъ $f(x, y, z, u, v)$-а сдѣлается, очевидно, нахожденіемъ абсо-

лютныхъ maximum'овъ и minimum'овъ, если, исключая изъ уравненій (34) два перемѣнныхъ въ видѣ функціи остальныхъ, напр. u и v въ видѣ функціи x'а, y, z [или, слѣдовательно, изъ (35), du и dv въ видѣ функціи dx'а, dy, dz], мы представимъ себѣ, что эти значенія u и v можно внести въ выраженіе f'а такимъ образомъ, чтобы преобразовать послѣднее въ функцію трехъ перемѣнныхъ, оставшихся вполнѣ независимыми, x, y, z. Но, по принципу Фермата, уравненія, способныя опредѣлить x, y, z въ предвидѣнномъ случаѣ maximum'а или minimum'а, будутъ образовываться, выражая уничтоженіе, каковы бы ни были отношенія между dx, dy, dz, всего дифференціала df, т.-е. образуя соотношеніе

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv=0, \tag{36}$$

гдѣ ясно, что du и dv суть функціи dx'а, dy'а, dz'а, опредѣленныя условіями (35). Итакъ мы могли бы рѣшить по отношенію къ du и dv два уравненія первой степени (35), затѣмъ подставить такимъ образомъ найденныя значенія, линейныя по dx, dy и dz, въ (26) и уничтожить тогда отдѣльно полные коэффиціенты при трехъ независимыхъ дифференціалахъ dx, dy и dz, чтобы получить между x, y, z, согласно съ предварительно данными указаніями (стр. 175), три искомыхъ уравненія. Но это исключеніе du'а и dv'а въ (35) и (36) приводитъ къ общимъ и болѣе симметричнымъ уравненіямъ, когда вводятъ, какъ это и будетъ далѣе, сюда вспомогательныя неизвѣстныя λ, μ въ одномъ числѣ съ уравненіями условія (34).

Сложимъ (36) съ двумя соотношеніями (35), умноживъ сначала ихъ соотвѣтственно на эти вспомогательныя неизвѣстныя λ, μ, которыя мы опредѣлимъ впослѣдствіи наиболѣе простымъ образомъ. Тогда получится:

$$\tag{37}\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)dy+\\&+\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)dz+\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)du+\\&\qquad+\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)dv=0.\end{aligned}\right.$$

Но мы знаемъ, что если бы члены съ dx, dy, dz фигурировали одни въ этомъ соотношеніи (37), то мы имѣли бы право уничтожить ихъ коэффиціенты; съ другой же стороны ничто не мѣшаетъ намъ сдѣлать, чтобы эти члены были здѣсь дѣйствительно одни, такъ какъ мы можемъ выбрать множителей λ и μ такимъ образомъ, чтобы они уничтожали въ (37) коэффиціенты, по крайней мѣрѣ, при du и dv, коэффиціенты

первой степени по λ, μ; а уничтоженіе этихъ коэффиціентовъ приводить такимъ образомъ къ рѣшенію системы уравненій первой степени. Итакъ мы будемъ имѣть въ концѣ концовъ уравненія maximum'а и minimum'а, могущія быть написанными въ сокращенной формѣ черезъ

$$(38) \qquad \frac{\partial f}{\partial(x, y, z, u, v)} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial(x, y, z, u, v)} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial(x, y, z, u, v)} = 0$$

и число которыхъ будетъ числомъ данныхъ неизвѣстныхъ x, y, z, u, v. Соединивъ ихъ съ условіями (34), число которыхъ равно числу вспомогательныхъ неизвѣстныхъ λ, μ, мы получимъ систему стольких уравненій, сколько неизвѣстныхъ, послѣ рѣшенія которой максимальное или минимальное значеніе $f(x, y, z, u, v)$, предположенное предвидѣннымъ (относительно его существованія), будетъ вычислено безъ труда.

Но, очевидно, можно было бы прямо перейти къ уравненіямъ (38), если бы, считая всѣ перемѣнныя x, y, z, u, v независимыми, начать искать maximum и minimum функціи $f + \lambda\varphi + \mu\psi$, образующейся отъ сложенія разсматриваемой $f(x, y, z, u, v)$ съ первыми частями уравненій условія $\varphi = 0$, $\psi = 0$, умноженныхъ на столько же неизвѣстныхъ постоянныхъ множителей λ, μ, при чемъ сохранить опредѣленіе множителей посредствомъ самихъ уравненій условія. Итакъ, мы можемъ высказать слѣдующее правило, называемое *правиломъ относительныхъ minimum'овъ или maximum'овъ*, доказательство котораго и было цѣлью, которую мы здѣсь преслѣдовали:

относительный maximum или minimum функціи, перемѣнныя которой связаны уравненіями условія $\varphi = 0$, $\psi = 0, \ldots$, получается точно такъ же, какъ будто бы надо найти абсолютный maximum или minimum, предполагаемый существующимъ, выраженія $f + \lambda\varphi + \mu\psi + \ldots$, въ которомъ $\lambda, \mu, \ldots$ означаютъ какія-либо постоянныя, могущія быть исключенными или опредѣленными въ концѣ концовъ тѣми же уравненіями $\varphi = 0$, $\psi = 0, \ldots$

Замѣтимъ, что если бы λ, μ вмѣсто того, чтобы быть постоянными, были, какъ x, y, z, u, v, независимыми перемѣнными, то, чтобы найти абсолютный maximum или minimum для $f + \lambda\varphi + \mu\psi$ надо было бы приложить къ уравненіямъ (38) тѣ, которыя дало бы уничтоженіе частныхъ производныхъ, φ, ψ, этой функціи по отношенію къ λ и μ; вслѣдствіе этого получились бы всѣ уравненія, необходимыя для вычисленія $x, y, z, u, v, \lambda, \mu$, включая сюда *условія* $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Но такъ какъ послѣднія даются явными, то не обязательно получать ихъ, почему можно ограничиться разсмотрѣніемъ промежуточныхъ множителей λ, μ, какъ постоянныхъ.

110. — Примѣръ: разложеніе даннаго числа на части x, y, z,..., произведеніе которыхъ $x^\alpha y^\beta z^\gamma$... было бы maximum'омъ.

Какъ примѣръ, найдемъ относительный maximum произведенія (для ясности мы ограничимъ его тремя множителями) $f = x^\alpha y^\beta z^\gamma$, гдѣ α, β, γ означаютъ данныя, цѣлые показатели, а x, y, z положительныя количества въ такомъ же числѣ; сумма послѣднихъ должна имѣть извѣстное значеніе A. Этотъ maximum вполнѣ существуетъ; такъ какъ x, y, z заключаются между нулемъ и A, то произведеніе $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, заключенное также между нулемъ и $A^{\alpha+\beta+\gamma}$, получаетъ обязательно значеніе, которое можетъ превосходить всякое другое значеніе при значеніяхъ x'а, y, z, отличающихся отъ нуля, — тогда какъ оно уменьшается до уничтоженія, если съ той и другой стороны этихъ значеній x'а, y, z заставить тѣ изъ перемѣнныхъ, которыя выбраны независимыми, измѣняться въ какихъ-либо отношеніяхъ, но такихъ, чтобы какое-либо изъ нихъ уничтожалось или заставляло уничтожаться послѣднюю (единственно зависимую) часть въ A, т.-е. x, y или z.

Очевидно, что принципъ Фермата и, слѣдовательно, предыдущее правило приложимы къ тѣмъ значеніямъ x'а, y, z, которыя такимъ образомъ дѣлаютъ функцію f, сколь возможно, большей. Уравненія условія обращаются въ $x+y+z-A=0$, поэтому мы должны поступать такъ, какъ будто бы дѣло шло о нахожденіи абсолютнаго maximum'а отъ $f+\lambda(x+y+z-A)$; и соотношенія (38) сдѣлаются

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda=0.$$

Поэтому черезъ исключеніе λ'ы они дадутъ уравненія maximum'а

$$(39)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Но, такъ какъ f есть произведеніе $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, то его частныя производныя будутъ соотвѣтственно $\frac{\alpha}{x}f$, $\frac{\beta}{y}f$, $\frac{\gamma}{z}f$. Слѣдовательно, если во всѣхъ частяхъ (39) уничтожить общій множитель f, который имѣетъ свое разсматриваемое значеніе отличающимся отъ нуля, и если сохранить остальныя отношенія, то получится

$$(40)\qquad \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}.$$

Такимъ образомъ, *произведенiе* $x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$ *дѣлается maximum'омъ, если разложить данное число A на части* x, y, z, *соотвѣтственно пропорцiональныя даннымъ показателямъ* α, β, γ.

Въ частномъ, наиболѣе простомъ случаѣ, когда $\alpha = \beta = \gamma = 1$, безпрерывное равенство (40) дѣлается $x = y = z$. Итакъ, *чтобы разложить положительное количество на данное число частей, которыя имѣли бы свое произведенiе maximum'омъ, надо взять всѣ эти части равными между собой.*

ГЛАВА IX.

Геометрическія примѣненія дифференціальнаго исчисленія: теорія контактовъ плоскостныхъ кривыхъ; разсмотрѣніе ихъ прямыхъ-касательныхъ, ихъ вогнутости или выпуклости и особенныхъ точекъ.

111. — Замѣчаніе о геометрическихъ примѣненіяхъ дифференціальнаго исчисленія къ тому, что касается плоскостныхъ кривыхъ: безконечно-малый треугольникъ.

Мнѣ остается изложить главныя примѣненія дифференціальнаго исчисленія къ теоріи кривыхъ, *плоскостныхъ или пространственныхъ*, и къ теоріи кривыхъ поверхностей. Наиболѣе простыя изъ этихъ примѣненій были уже нами разсмотрѣны подробно, если они этого заслуживали, или были, по крайней мѣрѣ, указаны при разстотрѣніи функцій и ихъ производныхъ. Такимъ образомъ (остановимся пока на плоскостныхъ кривыхъ) какая-либо функція $y=f(x)$ одного лишь перемѣннаго, функція, или явная, или неявная, т.-е. опредѣляющаяся нерѣшеннымъ уравненіемъ $F(x, y)=c$, позволяетъ намъ, если считать x за абсциссу, а y — за ординату, разсматривать на плоскости кривую, весь ходъ которой зависитъ отъ этой функціи, и касательная къ которой въ каждой точкѣ представляетъ данный способъ варіированія функціи, т.-е. ея первую производную или отклоненіе, тогда какъ кругъ-касательный этой кривой выражаетъ, между прочимъ, вторую производную функціи, т.-е. данный способъ варіированія ея отклоненія*). Поэтому разсматриваемая кривая можетъ быть какою-либо плоскостной кривой, которая и служитъ, благодаря примѣненію координатныхъ осей x'овъ и y'овъ, опредѣленіемъ функціи $y=f(x)$.

Мы видѣли (стр. 41 и 42) и то какъ дуга s кривой, считаемая съ произвольной точки послѣдней и положительно въ направленіи растущихъ абсциссъ, образуетъ новую функцію x'а, связанную съ y, если x и y прямоугольныя координаты, соотношеніемъ $s'=\sqrt{1+y'^2}$,

---

*) Представленіе круга касательнаго, правда, помѣщено въ части II; но то же самое мы увидимъ вскорѣ и въ части I.

существующимъ между ихъ производными. Эта формула была получена, какъ частный случай другой, выведенной непосредственно (стр. 41) для какой-либо пространственной кривой, при которой очень малое увеличеніе Δs дуги, способное быть слитой съ соотвѣтственной хордой, принимается за діагональ параллелепипеда, ребра котораго, вдоль трехъ осей, суть одновременныя увеличенія Δx, Δy, Δz трехъ координатъ. Но когда хотятъ примѣнить эту формулу къ кривой на плоскости xy'овъ, то параллелепипедъ обращается въ треугольникъ MHM' (стр. 26), гдѣ лишь для того, чтобы выразить желаніе разсматривать предѣлъ, надо двѣ стороны $MH = \Delta x$ и $HM' = \Delta y$, параллельныя осямъ, сдѣлать двумя дифференціалами dx и dy абсциссы и ординаты и гдѣ, слѣдовательно, третья сторона MM', безконечно-малая хорда, дѣлается надлежащимъ элементомъ ds дуги и первымъ элементомъ касательной MT. Если оси прямоугольны, то уголъ H — прямой и, такъ какъ $\operatorname{tg} HMM'$, сдѣлавшійся $\operatorname{tg} HMT$, есть отклоненіе кривой, то треугольникъ даетъ

$$(1) \qquad \text{отклоненіе} = \frac{dy}{dx}, \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

или, черезъ замѣну dy и ds черезъ $y'dx$ и $s'dx$,

$$(2) \qquad \text{отклоненіе} = y', \qquad s' = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Треугольникъ съ сторонами dx, dy, ds получилъ названіе *безконечно-малаго треугольника*: онъ показываетъ элементъ ds кривой въ отношеніяхъ направленія и величины его къ элементамъ dx, dy координатъ и живо представляетъ самый законъ безпрерывнаго образованія кривой. Барровъ, англійскій геометръ XVII вѣка, первый показалъ всю важность и пользу этого треугольника.

Мы получили касательную и кругъ-касательный кривой, какъ соотвѣтственные предѣлы прямой и окружности, которыя имѣли бы съ кривой возможно наибольшее число общихъ точекъ, отвѣчающихъ равноотстоящимъ абсциссамъ, разстояніе между которыми стремится къ нулю. Мы видѣли, что въ предѣлѣ изъ этого равенства двухъ или трехъ послѣдовательныхъ ординатъ въ кривой и въ прямой или кругѣ вытекаетъ равенство въ окончательной точкѣ контакта первой, y', или двухъ первыхъ, y' и y'', производныхъ ординаты y по отношенію къ абсциссѣ x въ этой кривой и въ прямой или кругѣ; отсюда (стр. 148) непосредственно вытекаетъ, что ордината кривой и ордината прямой или разсматриваемаго круга суть двѣ функціи абсциссы, имѣющія при значеніи x'а, отвѣчающемъ общей точкѣ, соприкосновеніе, по крайней мѣрѣ, перваго порядка при касательной и, по крайней мѣрѣ, второго при кругѣ. Но мы имѣемъ возможность обобщить эти различные случаи; мы выведемъ *теорію контактовъ* плоскостныхъ *линій* и *кривыхъ-касательныхъ*, съ чего и начнемъ разсмотрѣніе плоскостныхъ кривыхъ.

112. — Общая теорія контактовъ плоскостныхъ кривыхъ: условія и обозначеніе контакта порядка n.

Пусть будутъ даны въ видѣ своихъ уравненій $y = f(x)$, $Y = \varphi(x)$ двѣ кривыя AB, AC, отнесенныя къ оси Ox абсциссъ и оси Oy ординатъ, которыя при первой кривой называются y, а при второй Y. Въ общей точкѣ A или при соотвѣтственномъ значеніи x абсциссы эти двѣ кривыя имѣютъ *контактъ порядка n*, если функціи $f(x)$, $\varphi(x)$, выражаю-

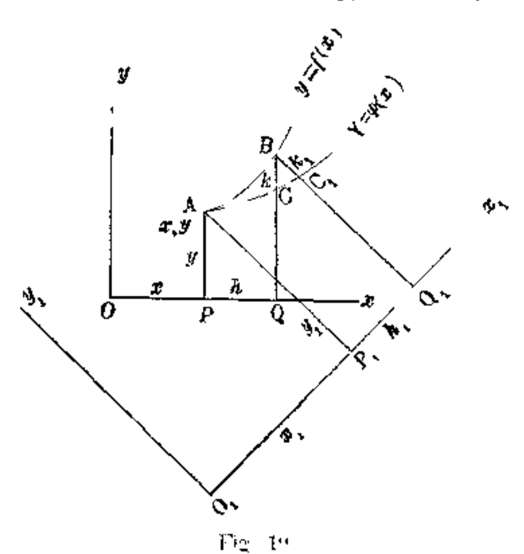


Fig. 1?

щія ихъ ординаты, имѣютъ сами такой контактъ, опредѣляемый тѣмъ, что если придать абсциссѣ, начиная съ общей точки $A(x, y)$, безконечно-малое положительное или отрицательное увеличеніе $PQ = h$ и построить неопредѣленную линію QB, параллельную къ оси y'овъ, то *отрѣзокъ* на этой параллели, $BC = k$, заключенный между двумя кривыми и равный разности $f(x+h) - \varphi(x+h)$ ихъ соотвѣтственныхъ ординатъ BQ и CQ, будетъ безконечно-меньше n'ной степени, h^n, одновременной варіаціи h, получаемой абсциссой, но не будетъ въ то же время безконечно-меньше слѣдующей цѣлой степени, h^{n+1}, этой же варіаціи.

По доказательству № 92 *такой контактъ порядка n произойдетъ при необходимомъ и достаточномъ условіи, заключающемся въ томъ, что, при означенномъ значеніи x абсциссы, получается взаимное равенство ординатъ y, Y двухъ кривыхъ и ихъ n первыхъ производныхъ по отношенію къ абсциссѣ, слѣдующія же двѣ производныя порядка n + 1 даютъ уже неравенство*. Иначе говоря, для этого контакта надо имѣть въ общей точкѣ

$$(3) \quad y = Y, \quad y' = Y', \quad y'' = Y'', \ \ldots, \quad y^{(n)} = Y^{(n)}, \quad y^{(n+1)} \gtrless Y^{(n+1)}.$$

Въ частномъ случаѣ, чтобы контактъ былъ перваго порядка, надо и достаточно, чтобы двѣ кривыя имѣли одну и туже касательную въ общей точкѣ и угловые коэффиціенты y', Y' взаимно совпадающими.

Обыкновенно отношеніе k къ h^{n+1} не увеличивается неопредѣленно при $h=0$, когда контактъ порядка n, и отрѣзокъ k, или $f(x+h)-\varphi(x+h)$, между двумя кривыми есть произведеніе h^{n+1} на какую-либо функцію $\psi(h)$, которая въ предѣлѣ $h=0$ остается конечною и не уничтожается. Такимъ образомъ при всѣхъ (малыхъ или большихъ) значеніяхъ h, сдѣлавшагося теперь независимымъ перемѣннымъ, возьмемъ $k=h^{n+1}\psi(h)$; тогда ордината одной изъ кривыхъ, AB напр., выразится черезъ

$$\varphi(x+h)+h^{n+1}\psi(h).$$

Назовемъ, съ одной стороны, черезъ $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ $n+1$ очень малыхъ независимыхъ параметровъ, стремящихся къ нулю, а съ другой стороны — черезъ $\Phi(x+h)$, $\Psi(h)$ функціи перемѣнной формы, стремящіяся къ $\varphi(x+h)$, $\psi(h)$, когда ε'ы — къ нулю; вслѣдствіе этого два значенія $\varphi(x+h)$, $\varphi(x+h)+h^{n+1}\varphi(h)$ какихъ-либо ординатъ $\varphi(x+h)$, $f(x+h)$ данныхъ кривыхъ AC, AB дѣлаются предѣлами выраженій

$$(4) \quad \Phi(x+h) \text{ и } \Phi(x+h)+(h-\varepsilon_0)(h-\varepsilon_1)(h-\varepsilon_2)\ldots(h-\varepsilon_n)\Psi(h).$$

Представимъ себѣ, что построены двѣ перемѣнныя кривыя, ординатами которыхъ служатъ выраженія (4), а предѣлами — очевидно, двѣ данныя кривыя AC, AB. Такъ какъ послѣдній членъ въ (4) уничтожается при $h=\varepsilon_0, =\varepsilon_1, =\varepsilon_2, \ldots, =\varepsilon_n$, то вторая изъ этихъ перемѣнныхъ кривыхъ будетъ имѣть свои точки, соотвѣтствующія абсциссамъ $x+h$, очень мало отличающимся отъ $x+\varepsilon_0$, $x+\varepsilon_1$, $x+\varepsilon_2, \ldots, x+\varepsilon_n$, общими съ первой изъ этихъ двухъ кривыхъ; но ихъ отклоненія, опредѣляемыя производными (4)-аго по отношенію къ h, будутъ тѣмъ не менѣе различаться во всѣхъ этихъ общихъ точкахъ, которыя будутъ такимъ образомъ точками пересѣченія. Итакъ, *двѣ кривыя, находящіяся въ контактѣ порядка n, суть соотвѣтственные предѣлы перемѣнныхъ кривыхъ, которыя взаимно пересѣкаются въ $n+1$ произвольно расположенныхъ на очень маломъ протяженіи точкахъ, которыя стремятся соединиться въ одну только, именно въ точку контакта порядка n, равнозначащую $n+1$ общимъ безконечно-сосѣднимъ точкамъ.*

Обратно, *когда двѣ перемѣнныя кривыя, имѣющія для своихъ ординатъ, какъ предыдущія, функціи $F(x)$, $\Phi(x)$ абсциссы, безпрерывныя и имѣющія безпрерывными свои производныя n первыхъ порядковъ, представляютъ $n+1$ общихъ точекъ, стремящихся совпасть въ одной только, — то ихъ соотвѣтственные предѣлы,* уравненія которыхъ я возьму въ видѣ $y=f(x)$, $Y=\varphi(x)$, *имѣютъ въ этой единственной точкѣ контактъ, вообще, порядка n.* Дѣйствительно, если разсмотрѣть при каждой абсциссѣ x взаимный отрѣзокъ $k=F(x)-\Phi(x)$ между

двумя перемѣнными кривыми, предполагаемыми очень сосѣдними съ ихъ предѣлами, то мы увидимъ, что этотъ отрѣзокъ уничтожается по условію $n+1$ разъ на очень маломъ протяженіи: отсюда слѣдуетъ, по теоремѣ Ролля (стр. 31), что его первая производная $F'(x)-\Phi'(x)$ уничтожается по крайней мѣрѣ n разъ, его вторая производная $F''(x)-\Phi''(x)$, по крайней мѣрѣ, $n-1$ разъ и т. д. до n'ой производной, которая уничтожается, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ. Итакъ въ предѣлѣ, гдѣ все разсматриваемое протяженіе обращается въ точку, но гдѣ по условію функціи $F(x)$, $\Phi(x)$, сдѣлавшіяся $f(x)$, $\varphi(x)$, не перестаютъ быть безпрерывными съ своими n первыми производныхъ, $n+1$ разностей $f(x)-\varphi(x)$, $f'(x)-\varphi'(x)$, ..., $f^{(n)}(x)-\varphi^{(n)}(x)$ суть нули въ общей точкѣ; а это вполнѣ позволяетъ написать $n+1$ первыхъ изъ соотношеній (3). Что же касается до $(n+2)$-го, составляющаго неравенство $f^{(n+1)}(x)-\varphi^{(n+1)}(x)\lesseqgtr 0$, то можно предположить, что оно само по себѣ вѣрно въ виду рѣдкости уничтоженія такой величины, какъ $f^{(n+1)}(x)-\varphi^{(n+1)}(x)$, если ничто не заставляетъ приводить ее къ нулю. Если бы однако этотъ совершенно исключительный случай и произошелъ, то порядокъ контакта превосходилъ бы n-ый.

113. — Порядокъ контакта не зависитъ отъ выбора осей.

Такъ какъ двѣ данныя линіи, находящіяся въ контактѣ порядка n, суть предѣлы извѣстныхъ перемѣнныхъ кривыхъ, $n+1$ точка пересѣченія которыхъ стремятся къ совпаденію, и такъ какъ эти предѣлы двухъ кривыхъ, пересѣкающихся послѣдовательно $n+1$ разъ, каково бы ни было ихъ положеніе относительно осей, подъ единственнымъ условіемъ, что ординаты $F(x)$, $\Phi(x)$ образуетъ двѣ безпрерывныя функціи, имѣющія n также безпрерывныхъ функцій, — то *порядокъ контакта не зависитъ отъ выбора осей или составляетъ особенность, присущую исключительно системѣ двухъ кривыхъ*. На самомъ дѣлѣ этотъ порядокъ не можетъ сдѣлаться выше n-аго по отношенію къ извѣстнымъ осамъ, считаемымъ въ данную минуту за первоначальныя оси x'овъ и y'овъ, безъ того, чтобы вслѣдствіе этого же онъ не получилъ этого большаго значенія во всѣхъ прочихъ системахъ осей. Точно такъ же мы нашли (№№ 60 и 57), что кругъ-касательный въ точкѣ кривой остается тѣмъ же самымъ, когда расположеніе осей мѣняется; аналогичный фактъ будетъ очевиденъ для касательной, простого предложенія безконечно-малой хорды.

Но иногда по причинѣ указаннаго условія слѣдуетъ избѣгать брать за ось ординаты параллель къ общей касательной, проходящей черезъ A (fig. 19); это, дѣлая въ соотношеніяхъ (3) y', Y', а также слѣдующія производныя y'', Y'', . . ., безконечными, уничтожило бы все обозначеніе, приноровленное къ этимъ условіямъ (3). Съ такой осью y'овъ перемѣнныя кривыя, предѣлами которыхъ будутъ AB и AC, — очевидно, (если предѣлы, какъ мы и предполагали, сосѣдни) пересѣкались бы въ нѣ

скольких мѣстахъ, очень близкихъ къ A, извѣстными ординатами и въ одномъ только или ни въ одномъ остальными; вслѣдствіе этого ординаты не устанавливали бы, какъ мы допускали при доказательствѣ, двухъ единственныхъ и безпрерывныхъ серій значеній $F(x)$, $\Phi(x)$.

Предыдущія разсужденія, нѣсколько суммированныя, могутъ быть выражены въ своихъ результатахъ, касающихся устойчивости порядка контактовъ, очень простымъ геометрическимъ построеніемъ. Возьмемъ на fig. 19 двѣ новыя оси O_1x_1, O_1y_1, по отношенію къ которымъ двѣ координаты общей точки A будутъ $x_1 = O_1P_1$, $y_1 = P_1A$; построимъ при дугѣ AB одной изъ кривыхъ новое увеличеніе $h_1 = P_1Q_1$ абсциссы и новый отрѣзокъ $k_1 = BC_1$ между двумя линіями AB, AC. Вообще обѣ оси Oy, O_1y_1 ординатъ имѣютъ направленіе, отличающееся отъ направленія общей касательной, проходящей въ A къ обѣимъ кривымъ, и слѣдовательно отъ направленія двухъ хордъ AB, CC_1, безконечно-малыхъ или очень сосѣднихъ съ своимъ предѣломъ (при $h = 0$), совпадающимъ въ A съ общей касательной. Итакъ съ одной стороны хорда AB, соединяющая подъ конечными углами или двѣ параллели AP и BQ, или двѣ параллели AP_1 и BQ_1, очевидно, — одного и того же порядка съ прямыми PQ или h и P_1Q_1 или h_1, которыя тоже подъ конечными углами соединяютъ ту и другую систему этихъ параллелей; вслѣдствіе этого h_1 можетъ быть сравниваемъ съ h или равняется произведенію h'а на извѣстное число a, не стремящееся къ нулю и къ безконечности, съ другой стороны отношеніе двухъ отрѣзковъ $BC_1 = k_1$ и $BC = k$ въ треугольникѣ BCC_1 есть отношеніе синусовъ противолежащихъ угловъ C и C_1, синусовъ замѣтной величины, такъ какъ хорда CC_1 не стремится по направленію совпасть съ параллелями BC, BC_1 къ осямъ Oy, O_1y_1 ординатъ: слѣдовательно отношеніе k_1'а къ k есть извѣстное, конечное, какъ и a, число b. А такъ какъ мы имѣемъ $h_1 = ah$, $k_1 = bk$, то отношенія $\frac{k_1}{h_1^n}$, $\frac{k_1}{h_1^{n+1}}$, соотвѣтственно равныя $\frac{b}{a^n}\frac{k}{h^n}$, $\frac{b}{a^{n+1}}\frac{k}{h^{n+1}}$, или могущія быть сравниваемыми съ $\frac{k}{h^n}$, $\frac{k}{h^{n+1}}$, — безконечно-малы или нѣтъ въ одно и то же время, какъ эти послѣднія. А это позволяетъ сказать, что контактъ обязательно достигаетъ одного и того же порядка въ обоихъ случаяхъ.

114. — Контакты четнаго порядка и контакты нечетнаго порядка.

Наконецъ контакты нечетнаго порядка отличаются отъ контактовъ четнаго порядка важной *особенностью*: тогда какъ однѣ кривыя касаются не перекрещиваясь (контактъ нечетнаго порядка), другія пересѣкаются и находятся въ контактахъ четнаго порядка, какъ это можно видѣть въ обыкновенномъ случаѣ *простого пересѣченія*, который можно, для обобщенія, уподобить контакту *четнаго* порядка $n = 0$. Это различіе вытекаетъ изъ того, что порядокъ контакта — одинъ и тотъ же

при двухъ кривыхъ, какъ и при двухъ функціяхъ $y = f(\cdot)$, $Y = \varphi(\cdot)$, выражающихъ ихъ ординаты, и изъ того, что (стр. 150) та изъ двухъ функцій, которая была большей при малыхъ отрицательныхъ значеніяхъ h'а, остается опять большей или дѣлается, наоборотъ, меньшей при малыхъ положительныхъ значеніяхъ h'а, смотря по тому, будетъ ли порядокъ нечетный или четный. Та изъ двухъ кривыхъ, которая до прибытія въ общую точку находилась вверху другой или на сторонѣ y'овъ, положительныхъ относительно ея, остается поэтому опять вверху послѣ этой точки въ первомъ случаѣ и переходитъ внизъ, на сторону отрицательныхъ y'овъ, во второмъ. Прибавимъ, что когда порядокъ — нечетный, то вышеупомянутая изъ двухъ функцій или изъ двухъ ординатъ есть наибольшая во всемъ сосѣдствѣ съ точкой контакта, и $(n+1)$ производная этой функціи, $y^{(n+1)}$ или $Y^{(n+1)}$, по отношенію къ абсциссѣ, есть также наибольшая въ этой точкѣ, какъ мы видѣли на стр. 149, гдѣ разность $\varphi(h)$ между разсматриваемой ординатой и другой имѣетъ знакъ, какой стоитъ при $h^{n+1}\varphi^{(n+1)}(h)$, и вполнѣ положительна тогда.

Разсматриваемое различіе вытекаетъ еще изъ того, что двѣ данныя кривыя, находящіяся въ контактѣ порядка n, не могутъ замѣтнымъ образомъ образовать какой-либо отрѣзокъ между двумя перемѣнными кривыми, предѣльными положеніями которыхъ онѣ служатъ и которыя сами на замѣтныхъ разстояніяхъ одна отъ другой какъ до, такъ и послѣ пересѣченія состоятъ изъ $n+1$ точекъ пересѣченія, расположенныхъ на безконечно-маломъ протяженіи. Когда n нечетно, то число $n+1$ пересѣченій четно и каждая изъ двухъ кривыхъ, пересѣкающая съ обѣихъ сторонъ другую одинаковое число разъ, находится по отношенію къ ней, на замѣтномъ разстояніи, на той же самой сторонѣ, гдѣ она была до первой встрѣчи; поэтому ихъ предѣлы, идущіе на безконечно-маломъ разстояніи отъ нихъ, не могутъ перестать быть всецѣло на той же самой сторонѣ другого въ сосѣдствѣ съ точкой контакта, гдѣ они заставятъ всѣ эти пересѣченія совпасть; слѣдовательно такія кривыя не пересѣкутся. Обратное будетъ тогда, когда n четно: послѣ $n+1$ пересѣченій, тогда въ нечетномъ числѣ, каждая кривая по отношенію къ другой будетъ уже на той сторонѣ, гдѣ ея не было до встрѣчи; мы получимъ въ концѣ концовъ пересѣченіе, существующее въ двухъ предѣльныхъ кривыхъ.

115. — Кривыя-касательныя; ихъ польза.

Возьмемъ какую-либо кривую $y = f(x)$ и разсмотримъ въ ея плоскости еще перемѣнную линію опредѣленнаго вида или представляющуюся уравненіемъ формы $\varphi(x, y, a, b, c, \ldots) = 0$ съ $n+1$ неопредѣленными параметрами $a, b, c, \ldots$, какою была бы напр. подвижная прямая, выражающаяся соотношеніемъ $y - ax - b = 0$, кругъ произвольнаго расположенія и величины, имѣющей при прямоугольныхъ координатахъ уравненіемъ $(x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2 = 0$, наконецъ, чтобы перейти къ менѣе

простымъ кривымъ, самая общая коника, выражающаяся соотношеніемъ $ay^2+2bxy+cx^2+dy+ex-1=0$. Но можно между всѣми этими перемѣнными кривыми $\varphi(x, y, a, b, c, \ldots)=0$ выбрать такую, которая при данной абсциссѣ x представляетъ наиболѣе возвышенный контактъ съ неподвижной кривой $y=f(x)$; для этого достаточно, чтобы параметры $a, b, c, \ldots$ удовлетворяли условія (3) такого контакта, что̀ получится, если мы будемъ приравнивать сначала къ $f(x)$ при означенномъ значеніи x'а выраженіе y'а, которое дается уравненіемъ $\varphi(x, y, a, b, c, \ldots)=0$, затѣмъ къ $f'(x)$ — первую производную этого выраженія, къ $f''(x)$ — вторую и т. д. Такъ какъ надо будетъ брать $n+1$ уравненій для опредѣленія $n+1$ неизвѣстныхъ $a, b, c, \ldots$, то n'ая производная, $y^{(n)}$, будетъ послѣдней, которую будутъ приравнивать въ кривой $y=f(x)$ и въ перемѣнной линіи, для того, чтобы сдѣлать эту послѣднюю неподвижной, вслѣдствіе чего контактъ достигаетъ n'аго порядка. Но вообще онъ не будетъ превосходить этотъ порядокъ; дѣйствительно весьма рѣдкое совпаденіе могло бы одно безъ всякаго другого дѣйствія произвести соотвѣтственное равенство, въ обѣихъ кривыхъ, одной или, тѣмъ болѣе, нѣсколькихъ слѣдующихъ производныхъ.

Частная линія $\varphi(x, y, a, b, c, \ldots)=0$, которая имѣетъ въ (x, y) наиболѣе тѣсный контактъ съ данной $y=f(x)$, называется *кривой-касательной* къ этой кривой въ разсматриваемой точкѣ (x, y). Она имѣетъ слѣдовательно сходство съ тѣмъ, что мы опредѣлили кругомъ-касательнымъ, который, дѣйствительно, имѣетъ съ кривой $y=f(x)$ три безконечно-сосѣднія, насколько это возможно или нужно для опредѣленія окружности, общія точки; это дало намъ три одинаковыхъ въ кругѣ и кривой значенія y, y', y''. Что касается до прямой-касательной, то двухъ точекъ достаточно для опредѣленія ея, почему она и будетъ ничѣмъ другимъ, какъ продолженіемъ безконечно-малой хорды, т.-е. касательною, такъ что въ ней и въ кривой можно приравнивать только ординату y и отклоненіе y'.

Когда же разсматриваютъ функцію только въ сосѣдствѣ одного изъ ея значеній, то серія Тэйлора позволяетъ приблизительно представить ее, какъ бы сложна она ни была, въ видѣ простого полинома степени тѣмъ меньшей, чѣмъ меньше требуемое приближеніе; поэтому, если дается сложная кривая, изъ которой будутъ пользоваться только довольно-малой дугой въ обѣ стороны отъ извѣстной точки, то строятъ въ этой точкѣ или замѣняютъ эту дугу либо ея прямой-касательной, либо ея кругомъ-касательнымъ etc., смотря по тому, допускаетъ ли природа вопроса между сложной и истинной кривой и болѣе или менѣе простой линіей, долженствующей ее замѣнить, отрѣзки h второго порядка малости, или только третьяго, и т. д. по отношенію къ разстоянію до точки контакта, отрѣзки, сравниваемые съ h^{n+1}, когда n есть порядокъ 1, 2, 4... происходящаго контакта, а $n+1$ есть порядокъ 2, 3, 5,... различныхъ параметровъ, входящихъ въ уравненіе или прямой, или окружности, или

коники, etc. Отсюда можно видѣть, какъ полезны могутъ быть кривыя-касательныя и какова важность ихъ открытія, сдѣланнаго Лейбницемъ, который указалъ на примѣненіе круга-касательнаго.

116. — Отношеніе кривой къ ея прямымъ-касательнымъ: выпуклость, вогнутость и перегибы этой кривой.

Пусть снова $y = f(x)$ будетъ уравненіемъ данной кривой, отнесенной къ какой-либо системѣ прямоугольныхъ осей; назовемъ черезъ x_1, y_1 подвижныя координаты, по отношенію къ этимъ же осямъ, ея касательной или прямой-касательной для того, чтобы не смѣшивать ихъ съ координатами x, y точки контакта. Такъ какъ прямая имѣетъ уравненіемъ $y_1 = ax_1 + b$, то ея ордината y_1 имѣетъ для первой производной a, а для всѣхъ слѣдующихъ нуль. Два параметра слѣдовательно опредѣляются такимъ образомъ, что при значеніи $x_1 = x$ абсциссы выраженіе $ax_1 + b$ ординаты равно y или $f(x)$, а его производная $a = y'$ или $f'(x)$. А это даетъ два соотношенія $a = y'$, $ax + b = y$, которыя, рѣшенныя по a, b, сдѣлаются $a = y'$, $b = y - y'x$ и измѣнятъ уравненіе $y_1 = ax_1 + b$ прямой въ уравненіе касательной

$$y_1 = y'x_1 + y - y'x \quad \text{или} \quad y_1 - y = y'(x_1 - x).$$

Вторая производная ординаты въ точкѣ контакта есть въ прямой нуль, а въ кривой y'' или $f''(x)$, количество, вообще разнящееся отъ нуля. Контактъ поэтому не превосходитъ первый порядокъ, какъ это и было видно, и токъ какъ искомый порядокъ — нечетный, то двѣ линіи касаются, не перекрещиваясь. Та же изъ двухъ, которая имѣетъ свою

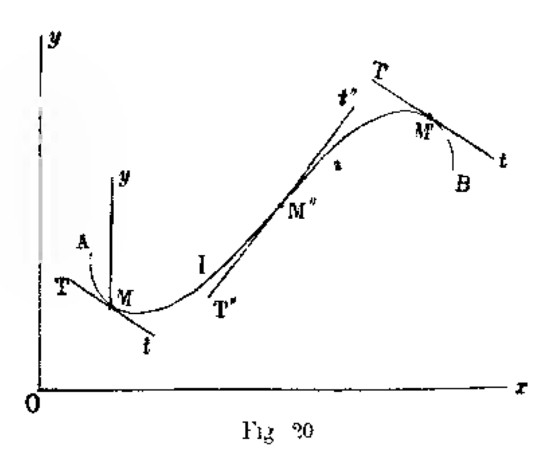


Fig. 20

вторую производную ординаты, нуль или $f''(x)$, въ этой точкѣ наибольшею, расположена по отношенію къ другой, въ сосѣдствѣ съ точкой контакта, на сторонѣ положительныхъ y'овъ. Поэтому въ мѣстахъ, гдѣ имѣютъ y'' или $f''(x)$ больше нуля, какъ это происходитъ напр. въ M

въ дугѣ AB, кривая по отношенію къ своей касательной Tt лежитъ на сторонѣ положительныхъ y'овъ (или на сторонѣ параллели My' къ Oy), имѣя слѣдовательно свою впадину съ этой стороны, а свою выпуклость съ противоположной стороны отрицательныхъ y'овъ: тогда говорятъ, что она обращаетъ свою *вогнутость* къ пол — нымъ y'амъ, а свою *выпуклость* къ отр — нымъ y'амъ. Въ мѣстахъ, гдѣ имѣютъ напротивъ y'' или $f''(x) < 0$, какъ въ M', кривая находится *внизу* своей касательной или, относительно ея, на сторонѣ отр — ныхъ y'овъ и обращаетъ выпуклость въ эту сторону, а выпуклость въ сторону пол — ныхъ y'овъ.

Остается исключительный случай, когда вторая производная $f''(x)$, предполагаемая безпрерывною функція x'а, уничтожается при данной абсциссѣ x. Тогда эта производная имѣетъ одно и то же нулевое значеніе какъ въ кривой, такъ и въ прямой, почему контактъ дѣлается высшаго, чѣмъ первый, порядка, т.-е. вообще второго; дѣйствительно надо было бы имѣть совершенно особенныя обстоятельства для того, чтобы слѣдующая производная $f'''(x)$ уничтожалась въ кривой, какъ это происходитъ въ прямой, и именно въ тотъ моментъ, когда уже уничтожается вторая производная $f''(x)$. Такимъ образомъ въ точкахъ, гдѣ $f''(x) = 0$, кривая обыкновенно имѣетъ съ своей касательной контактъ втораго порядка и, такъ какъ это — четный порядокъ, то двѣ линіи пересѣкаются: *кривая пересѣкается своею касательной.* Это происходитъ въ дугѣ AB въ точкѣ M'', гдѣ касательной служитъ $T''t''$. Подобныя точки называются *точками перегиба* по причинѣ измѣненія смысла [происходящаго со знакомъ при $f''(x)$], которое испытываетъ вогнутость, вездѣ противоположная прилежащей касательной и слѣдовательно направляющаяся въ разныя стороны при двухъ дугахъ $M''I$ и $M''i$, прилежащихъ соотвѣтственно къ двумъ отрѣзкамъ $M''T''$ и $M''t''$ касательной. Говорятъ еще, что здѣсь кривизна измѣняетъ смыслъ, чтобы выразить внезапное перемѣщеніе центра круга-касательнаго, очевидно располагающагося всегда на сторонѣ вогнутости и перескакивающаго слѣдовательно, если строить его послѣдовательно по различнымъ точкамъ кривой отъ I къ i, въ моментъ нахожденія въ M'' изъ одной части плоскости, раздѣленной кривой AB, въ другую.

Иногда случается, что y'', не будучи безпрерывной, измѣняетъ знакъ, не только не уничтожаясь, но дѣлаясь даже безконечной. Тогда опять происходитъ *перегибъ* т.-е. измѣненіе смысла вогнутости съ пересѣченіемъ кривой ея касательною; контактъ этихъ двухъ линій не болѣе, очевидно, второго порядка. Вслѣдствіе быстроты поворачиванія касательной отъ одной точки до слѣдующей (быстроты по отношенію къ производной y'' отклоненія y') радіусъ круга уничтожается, почему его центръ переходитъ безпрерывно съ одной стороны кривой на другую.

Исключая такой особенный случай и тѣ рѣдкіе случаи, когда y'' уничтожается безъ измѣненія знака, мы будемъ имѣть, что точки перегиба не отличаются отъ тѣхъ, гдѣ касательная, которую можно принять

за кругъ безконечнаго радіуса, представляетъ, какъ круги-касательные, контактъ второго порядка съ кривой, т.-е. три безконечно-сосѣднія общія точки или однѣ и тѣ же послѣдовательныя значенія y, y', y'', и дѣлается въ одно то же время и кругомъ-касательнымъ и прямой-касательной. Въ другихъ словахъ это — точки, гдѣ радіусъ круга-касательнаго дѣлается безконечнымъ. Наконецъ это можно видѣть изъ того, что уравненіе $y''=0$, написанное въ видѣ $dy'=0$, выражаетъ, при безконечно-малыхъ почти второго порядка, одинаковость отклоненія (которое опредѣляетъ y') при двухъ концахъ элементарной дуги ds или уничтоженіе измѣненія направленія касательной на этомъ протяженіи; очевидно этого не можетъ быть въ кругѣ, пока его радіусъ — конеченъ.

119*. — Точки поворота*).

Здѣсь намъ достаточно сказать, что иногда кривая рѣзко измѣняетъ направленіе и что точка, гдѣ это происходитъ, называется *точкой поворота*, если это измѣненіе равно двумъ прямымъ (угламъ), и *угловой*, когда оно отличается отъ двухъ прямыхъ.

---

*) Желающихъ ознакомиться съ другими *особенными точками* плоскостныхъ кривыхъ прошу обратиться къ „Приложеніямъ" къ главѣ IX или ко II части оригинала.

ГЛАВА X.

О кругѣ—касательномъ, о кривизнѣ и эволютѣ плоскостныхъ кривыхъ; *теорія свертывающихся линій.

125. — Общее разсмотрѣніе круга-касательнаго къ плоскостной кривой.

Начнемъ эту главу съ разсмотрѣнія круга-касательнаго къ плоскостнымъ кривымъ, который послѣ обыкновенной касательной служитъ какъ бы частнымъ, но наиболѣе важнымъ случаемъ линій касательныхъ. Назовемъ черезъ x и y его подвижныя координаты по отношенію къ системѣ *прямоугольныхъ* осей, черезъ x_1, y_1 — координаты его центра и черезъ R — его радіусъ. Его уравненіе будетъ:

$$(1)\qquad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=R^2.$$

Продифференцируемъ его два раза, принимая абсциссу x за независимое перемѣнное. Если мы уничтожимъ изъ результатовъ общаго множителя 2 и если замѣтимъ при второмъ дифференцированіи, что въ членѣ $(y-y_1)y'$, получающемся отъ перваго диффенцированія, два множителя $y-y_1$, y' имѣютъ соотвѣтственно производными y', y'', то мы будемъ имѣть для вычисленія этихъ двухъ первыхъ производныхъ y'а въ кругѣ:

$$(2)\qquad x-x_1+(y-y_1)y'=0,\qquad 1+y'^2+(y-y_1)y''=0.$$

Но замѣтимъ, что при абсциссѣ, обозначенной черезъ x, намъ даютъ по условію ординату y, тождественную ординатѣ $f(x)$ кривой, и столько же послѣдовательныхъ производныхъ y', y'',..., сколько мы можемъ взять соотвѣтственно равныхъ имъ $f'(x)$, $f''(x)$, ...; вслѣдствіе чего неизвѣстными количествами, входящими въ три уравненія (1) и (2), останутся

параметры въ томъ же числѣ x_1, y_1, R, опредѣляющіе кругъ. Послѣднее (2) дѣлаетъ извѣстнымъ $y - y_1$, а слѣдовательно и y_1; затѣмъ подстановка значенія $y - y_1$ въ первое (2) даетъ точно такъ же $x - x_1$ или x_1 и выраженія, такимъ образомъ найденныя для $x - x_1$ и $y - y_1$, измѣняютъ, черезъ извлеченіе квадратнаго корня, гдѣ мы можемъ, придать радіусу R знакъ y'''а, уравненіе (1) въ

$$(3) \qquad R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Таково выраженіе радіуса R круга-касательнаго.

Соотношеніе (3), простое соединеніе (1) и (2), *удовлетворяется во* всѣхъ точкахъ круга, когда y' и y'' получаютъ свои значенія, соотвѣтствующія этой кривой и перемѣняющіяся съ x: въ другихъ словахъ, это есть дифференціальное уравненіе второго порядка, общее всѣмъ кругамъ одного и того же радіуса. Изъ этого слѣдуетъ, что въ послѣднихъ значенія слѣдующихъ производныхъ, y''', y^{IV},... будутъ получаться, по желанію, или посредствомъ дифференцированія второго уравненія (2), или посредствомъ дифференцированія соотношенія (3), т.-е. отъ приравненія къ нулю послѣдовательныхъ производныхъ выраженія (3) R'а. Такимъ образомъ, уравненія, откуда получатся эти производныя y''', y^{IV},... въ кругѣ, могутъ быть написаны въ видѣ

$$(4) \qquad \frac{dR}{dx} = 0 \quad , \quad \frac{d^2R}{dx^2} = 0, \ldots$$

Но, опредѣливъ центръ (x_1, y_1) и радіусъ R круга-касательнаго въ (x, y) къ кривой $y = f(x)$, мы должны поискать, какимъ образомъ мы узнаемъ въ каждомъ случаѣ точный порядокъ контакта круга съ кривой, или какова будетъ, слѣдовательно, первая изъ производныхъ отъ y, начиная съ y''', различающаяся при этихъ двухъ линіяхъ въ данной точкѣ (x, y). Вообще, это будетъ третья производная y''', такъ какъ никакое расположеніе не можетъ быть взято для производной, которая получила бы въ кругѣ такое значеніе $f'''(x)$, какое она имѣетъ въ кривой. Но если вдоль этой послѣдней существуютъ какія-либо точки (x, y), гдѣ производная $f'''(x)$ дѣлается такой же, какъ и въ кругѣ, то, очевидно, мы прійдемъ вслѣдствіе этого къ тому, что въ первомъ (4) уравненіи первая часть, которая есть извѣстное выраженіе по y', y'', y''', будетъ нулемъ какъ въ кривой, такъ и въ кругѣ. Иначе говоря, выраженіе R въ видѣ функціи x'а, вычисляемое въ кривой по формулѣ (3), будетъ имѣть въ этихъ исключительныхъ точкахъ свою первую производную нулемъ. А въ тѣхъ же самыхъ точкахъ (x, y) четвертыя производныя y^{IV} будутъ опять равными въ кругѣ и въ кривой при необходимомъ и достаточномъ условіи, что второе соотношеніе (4) будетъ

удовлетворяться въ кривой. Очевидно, то же самое будетъ и съ слѣдующими производными.

Но подобныя совпаденія будутъ происходить только въ крайне рѣдкихъ случаяхъ, такъ что можно ограничиться первымъ соотношеніемъ (4), выражающимъ обыкновенно, согласно съ принципомъ Фермата, что R достигаетъ максимальнаго или минимальнаго значенія въ разсматриваемой точкѣ. Итакъ, вообще, *контактъ кривой съ ея кругомъ-касательнымъ — второгопорядка вдоль кривой и третьяго въ точкахъ, гдѣ радіусъ этого круга дѣлается или большимъ или меньшимъ, чѣмъ во всякомъ сосѣдствѣ.*

Отсюда слѣдуетъ, что, за исключеніемъ этихъ рѣдкихъ точекъ, контактъ есть четнаго порядка и что кругъ пересѣкаетъ кривую, какъ мы можемъ видѣть на фигурѣ (fig. 21). Но для всякаго другого круга, имѣющаго въ $M(x, y)$ такую же касательную MT, что и кривая, контактъ будетъ (въ виду различнаго значенія y''а) только перваго порядка, *или* не будетъ сопровождаться пересѣченіемъ.

Такимъ образомъ, *можно, вообще, заставить проходить черезъ данную точку кривой кругъ, и только одинъ, который въ одно время касался бы и пересѣкалъ бы ее: это кругъ-касательный. Но онъ перестанетъ пересѣкать кривую въ точкахъ, гдѣ радіусъ дѣлается maximum'омъ или minimum'омъ;* кромѣ того есть еще болѣе *продолжительный* контактъ съ ней, именно, когда она гораздо ближе, т.-е. на большомъ разстояніи, чѣмъ раньше, походитъ на кругъ. Всякая вершина кривой или конецъ оси симметріи находится (исключая случай прерывности) въ числѣ этихъ исключительныхъ точекъ; дѣйствительно ясно, съ одной стороны, что радіусъ R, принимающій одни и тѣ же значенія съ обѣихъ сторонъ, сдѣлается здѣсь maximum'омъ или minimum'омъ; съ другой стороны, что всякій кругъ, касающійся здѣсь съ кривой, имѣетъ такую же ось симметріи, что и она, и не можетъ пересѣкать кривую.

Чтобы построить кругъ-касательный къ какой-либо точкѣ $M(x, y)$ данной кривой AB, достаточно будетъ провести сначала касательную MT, которая равнымъ образомъ будетъ и его касательной, и отложить на *нормали* или на соотвѣтствующемъ перпендикулярѣ MC радіусъ $MC = R$, вычисленный по формулѣ (3), проводя его на той сторонѣ (касательной), которая образуетъ съ параллелью My' къ оси положительныхъ y'овъ острый или тупой уголъ, смотря по тому, вогнутость кривой и, слѣдовательно, круга обращена ли къ положительнымъ или отрицательнымъ y'амъ, т.-е. смотря по тому, имѣетъ ли знакъ $+$ или $-$ производ-

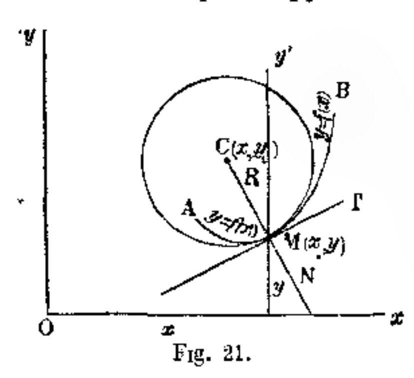


Fig. 21.

ная y'', общая кривой и кругу. Тотъ или другой случай будетъ указываться однимъ и тѣмъ же знакомъ радіуса R и y'', когда случится, какъ мы и дѣлали, брать положительнымъ въ выраженіи (3) R'а радикалъ, находящійся въ числителѣ. Центръ $C(x, y)$, такимъ образомъ, найденъ, остается описать только кругъ радіусомъ CM.

Значеніе (3) R'а упростится, если ввести нормаль N къ кривой, проходящую отъ точки $M(x, y)$ до встрѣчи съ осью абсциссъ x. Мы получили (стр. 130) для ея выраженія $\pm y\sqrt{1+y'^2}$; вслѣдствіе этого радикалъ $\sqrt{1+y'^2}$ будетъ представлять отношеніе N'а къ y, если случится придать нормали N такой знакъ, что и ординатѣ y. И формула (3) сдѣлается

$$(5) \qquad R = \frac{N^3}{y^3 y''}.$$

126.— Геометрическое опредѣленіе центра этого круга.

Но обратимся снова къ системѣ уравненій (2), которыя, если принять за x, y, y', y'' количества, отнесенныя къ данной точкѣ $M(x, y)$ кривой $y = f(x)$, — служили намъ для опредѣленія центра (x_1, y_1) круга; и поищемъ ихъ геометрическое представленіе. Припомнимъ, что второе изъ этихъ уравненій, по способу, которымъ оно выведено посредствомъ дифференцированія изъ перваго, будетъ имѣть за первую часть (при безконечно малыхъ почти второго порядка), если умножить его на dx, такое же увеличеніе, какое получаетъ первая часть перваго уравненія (2), когда x, y и y' увеличиваются соотвѣтственно на dx, $y'dx$, $y''dx$ или еще на дифференціалы dx, dy, dy', относящіеся къ переходу отъ точки M кривой (нижеприложенная фигура) къ безконечно-сосѣдней точкѣ M'. Такимъ образомъ, второе уравненіе (2), умноженное на dx и сложенное съ первымъ, даетъ, чтобы занять въ системѣ мѣсто второго (2), новое уравненіе, отличающееся отъ перваго (2) только подстановкой на мѣсто координатъ x, y точки M и соотвѣтствующаго углового коэффиціента y' касательной аналогичныхъ количествъ $x+dx$, $y+dy$, $y'+dy'$, относящихся къ M'. Поэтому система (2) равнозначаща уравненіямъ одной и той же формы

$$(6) \quad x - x_1 + (y - y_1)y' = 0\,, \; x + dx - x_1 + (y + dy - y_1)(y' + dy') = 0,$$

взятымъ въ предѣлѣ, гдѣ члены порядка dx^2 пренебрегаются въ сравненіи съ членами порядка dx'а, которыя сохраняются. Но разсматривая неизвѣстныя x_1 и y_1, какъ подвижныя координаты, мы узнаемъ въ первомъ (6) классическое уравненіе нормали, проходящей къ кривой въ M *). Такимъ образомъ, это уравненіе выражаетъ, что центръ

*) Это можно видѣть изъ того, что касательная и нормаль, проведенныя въ точкѣ $M(x, y)$ къ кривой въ то же время, какъ и параллель къ положительнымъ x'амъ и

(x_1, y_1) круга-касательнаго принадлежитъ нормали MN. Но второе (6) есть также уравненіе нормали $M'N'$, проходящей въ слѣдующей точкѣ M' кривой, гдѣ x, y, y' дѣлаются $x + dx$, $y + dy$, $y' + dy'$; а это уравненіе означаетъ, что центръ (x_1, y_1) одинаково принадлежитъ и второй нормали. Поэтому онъ расположенъ въ ихъ пересѣченіи C, т.-е. въ предѣльномъ положеніи точки, гдѣ нормаль MN пересѣкается сосѣдней нормалью $M'N'$, неопредѣленно приближенной къ ней. Система (2), въ которую обратится тогда (6), доказываетъ справедливо, что этотъ предѣлъ существуетъ или вполнѣ опредѣленъ.

Такимъ образомъ, *центръ круга-касательнаго находится на пересѣченіи двухъ нормалей, проходящихъ къ кривой, одна въ точкѣ касанія, другая въ безконечно-сосѣдней съ ней точкѣ.*

127. — Объ углѣ смежности.

Уголъ MCM' двухъ безконечно сосѣднихъ нормалей MN и $M'N'$ называется *угломъ смежности* отрѣзанной дуги $MM' = ds$. Мы будемъ представлять его черезъ $d\vartheta$. Онъ равняется углу TAT' между двумя соотвѣтствующими касательными $M'T'$, MT, безконечно-малому, какъ онъ самъ, равняется потому, что послѣдній имѣетъ свои стороны перпендикулярными къ сторонамъ перваго. Его обыкновенно строятъ въ неподвижной точкѣ, въ началѣ O напр., проводя подвижную прямую Ot, постоянно параллельную направленію MT, берущемуся въ каждое мгновеніе въ точкѣ M, описывающей кривую. Эта прямая занимаетъ два положенія Ot и Ot', параллельныя MT и $M'T'$, когда движущаяся точка находится соотвѣтственно въ M и M'; и уголъ tOt', на который поворачивается эта прямая при переходѣ изъ одного положенія въ другое, очевидно, равенъ TAT' и, слѣдовательно, есть уголъ смежности.

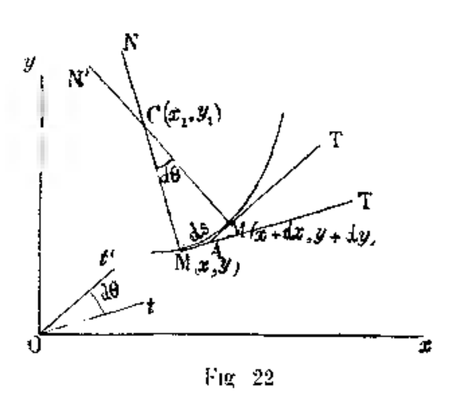


Fig 22

Можно видѣть, что онъ измѣряетъ измѣненіе, получаемое направленіемъ касательной или кривой на протяженіи соотвѣтствующей дуги ds.

со стороны этихъ послѣднихъ, образуютъ съ обѣихъ сторонъ этой параллели взаимно-дополнительные острые углы; вслѣдствіе этого ихъ отклоненія, тангенсы этихъ угловъ и кромѣ того обратныхъ знаковъ имѣютъ для произведенія — 1. Отклоненію касательной есть y', поэтому отклоненіе $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ нормали сдѣлается частнымъ единицы на $-y'$; равенство, которое приводитъ къ первому (6).

Вычислимъ его или при помощи нормалей, или при помощи касательныхъ, или ихъ параллелей Ot и Ot'.

Въ первомъ случаѣ треугольникъ MCM', образующійся двумя нормалями и безконечно-малой хордой дуги ds даетъ пропорцію $\frac{\sin CM'M}{CM} = \frac{\sin MCM'}{MM'}$, или послѣ подстановки на мѣсто каждаго члена другого, имѣющаго съ нимъ отношеніе, стремящееся къ 1,

$$(7) \qquad \frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{ds}.$$

Замѣнимъ здѣсь R его значеніемъ (3), ds — черезъ $\sqrt{dx^2+dy^2}$, выраженіе, обращающееся въ $\sqrt{1+y'^2}\,dx$, тогда мы получимъ искомую формулу:

$$(8) \qquad d\vartheta = \frac{y''dx}{1+y'^2}.$$

Но это можно найти непосредственно, если разсмотрѣть уголъ xOt, дифференціалъ котораго есть $d\vartheta$ или $tOt' = xOt' - xOt$, получающійся при переходѣ отъ точки M кривой къ слѣдующей точкѣ M', т.-е отъ увеличенія x на dx. Дѣйствительно, этотъ уголъ xOt имѣетъ для тангенса отклоненіе y' движущейся прямой Ot, параллельной къ MT; вслѣдствіе этого имѣемъ $xOt = \operatorname{arctg} y'$ и, припоминая производную отъ arctg,

$$d.xOt \quad \text{или} \quad d\vartheta = \frac{dy'}{1+y'^2} = \frac{y''dx}{1+y'^2}.$$

Замѣтимъ, что если ввести въ первоначальное соотношеніе (7) выраженіе (8) $d\vartheta$, полученное такимъ образомъ непосредственно, и значеніе, не менѣе простое, $\sqrt{1+y'^2}\,dx$ элементарной дуги ds, то эта формула (7) будетъ легко приводиться къ выраженію (3) радіуса круга-касательнаго.

128. — О кривизнѣ плоскостной кривой.

Дуга тѣмъ болѣе крива, т.-е. тѣмъ болѣе отличается отъ прямой, чѣмъ скорѣе измѣняется ея направленіе, или чѣмъ на большій уголъ $d\vartheta$ смежности вращается касательная ея на безконечно-маломъ протяженіи ds, берущемся одинаковымъ, какова бы ни была эта дуга. А такъ какъ въ данной кривой уголъ смежности, очевидно, увеличивается съ ds, то естественно измѣрять *кривизну* на какомъ-либо протяженіи тѣмъ, чѣмъ будетъ уголъ смежности, или измѣненіемъ направленія *вдоль дуги, равной единицѣ*, если между двумя точками подобной дуги это измѣненіе будетъ происходить *такъ однообразно*, что оно стремится быть

таковымъ же и вовлѣ этого протяженія вдоль все болѣе и болѣе укорачивающейся дуги, или что оно можетъ считаться таковымъ вдоль смежной, *безконечно-малой* дуги ds. Въ другихъ словахъ, надо будетъ, какъ говорятъ, *отнести* измѣненіе $d\vartheta$ направленія *къ единицѣ* длины ds и взять за *опредѣленіе* кривизны элементарной дуги ds или даже кривой въ точкѣ (x, y), гдѣ эта дуга расположена, такимъ образомъ полученное отношеніе $\frac{d\vartheta}{ds}$.

Поэтому формула (7) показываетъ, что кривизна будетъ измѣряться обратнымъ числомъ радіуса R круга-касательнаго и что будемъ имѣть въ виду выраженія (3) R'а

$$\text{(9)} \qquad \text{кривизна} = \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Таково выраженіе кривизны. Но можно было бы и предвидѣть этотъ результатъ (9), если замѣтить: 1) что, съ одной стороны, кривизна кривой въ данной точкѣ (x, y) зависитъ отъ способа, которымъ вращается касательная, т.-е. не только отъ отклоненія y', но также и отъ его быстроты y'' варіированія, и что она (кривизна), очевидно, одна и та же, какъ и эти два количества y', y'', въ кривой и ея кругѣ-касательномъ; 2) что, съ другой стороны, въ кругѣ-касательномъ, гдѣ нормаль и, слѣдовательно, касательныя вращаются на равныя количества вдоль равныхъ дугъ, почему кривизна постоянна или выражается отношеніемъ всего измѣненія 2π направленія при полномъ оборотѣ къ описываемой окружности $2\pi R$; а это даетъ для частнаго обратное число радіуса R.

Такъ какъ кругъ-касательный, вслѣдствіе своей *однообразно-кривой* фигуры, устанавливаетъ весьма ясное представленіе кривизны линіи въ точкѣ, гдѣ онъ проходитъ, то этотъ кругъ называютъ также *кругомъ кривизны*, а его центръ и радіусъ почти всегда называютъ *центромъ и радіусомъ кривизны* данной линіи.

129. — Эволюта плоскостной кривой.

Эволютой плоскостной линіи $ABCDE\ldots$ называютъ мѣсто ея центровъ кривизны A', B', C', D', E',... или, слѣдовательно, мѣсто послѣдовательныхъ пересѣченій ея нормалей. Поэтому это — вторая кривая $A'B'C'\ldots$ Посмотримъ сначала, какъ будетъ образовываться ея уравненіе. Уравненіе данной кривой будетъ напр. $F(x, y) = 0$ и будетъ доставлять посредствомъ двухъ дифференцированій значенія y''а и y'''а въ видѣ функціи x'а и y'а, поэтому точка (x_1, y_1) эволюты, соотвѣтствующая какой-либо (x, y) точкѣ этой кривой, будетъ дана уравненіями (2), которыя соединенныя съ $F(x, y) = 0$, образуютъ систему,

опредѣляющую y, x_1, y_1 въ видѣ функціи x'а. Поэтому можно будетъ, предполагая, что эту систему можно рѣшать по отношенію къ x_1 и y_1 послѣ исключенія y'а, построить эволюту по точкамъ при помощи абсциссы x первой кривой, абсциссы, взятой за *вспомогательное* перемѣнное. Но лучше, если хотятъ разсмотрѣть подробно эволюту, исключить x въ двухъ соотношеніяхъ формы $x_1 = \varphi(x)$, $y_1 = \psi(x)$, такимъ образомъ полученныхъ, или, проще, исключить x и y въ трехъ соотношеніяхъ системы, получая, напр., x и y изъ двухъ уравненій (2) въ видѣ функціи x_1'а и y_1'а, чтобы подставить ихъ значенія въ $F(x, y) = 0$. Уравненіе данной кривой такимъ образомъ дастъ соотношеніе, существующее между x_1 и y_1, т.-е. уравненіе эволюты.

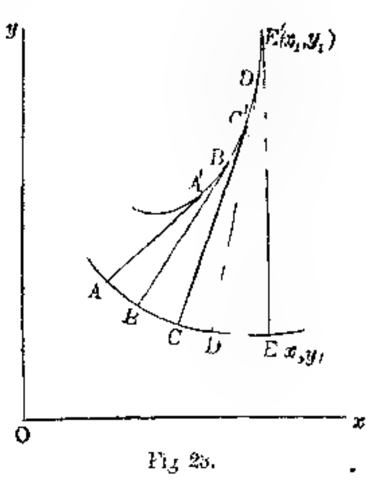


Fig 23.

Если уравненіе $F(x, y) = 0$ алгебраично, то соотношенія (2) будутъ также алгебраическія, и, слѣдовательно, вытекающее изъ $F = 0$ и (2) по x_1 и y_1 будетъ не менѣе алгебраично, согласно теоріи исключенія въ алгебраическихъ уравненіяхъ. Поэтому, *эволюта алгебраической кривой есть алгебраическая кривая.*

Передъ тѣмъ, какъ перейти къ примѣрамъ этихъ исключеній, разсмотримъ чисто синтетическимъ способомъ важныя общія свойства эволюты кривой, открытыя въ XVII столѣтіи Гюйгенсомъ (Huygens).

130. — Общія свойства эволютъ.

Они состоятъ изъ двухъ главныхъ, изъ которыхъ первое говорится такъ: *нормали данной кривой суть касательныя къ ея эволютѣ въ соотвѣтствующихъ центрахъ кривизны.*

Чтобы доказать это, разсмотримъ сейчасъ не настоящую эволюту, но безпрерывную, т.-е. безъ угловыхъ точекъ, линію, соединяющую одно съ другимъ послѣдовательныя пересѣченія A', B', C', D',... нормалей AA', $BB'A'$, $CC'B'$, $DD'C'$,..., проходящихъ къ кривой въ точкахъ A, B, C, D,..., находящихся очень близко другъ отъ друга. Когда эти послѣднія сближаются неопредѣленно близко, нормали пересѣкаются, въ виду безпрерывности, подъ все болѣе и болѣе малыми углами по мѣрѣ того, какъ онѣ будутъ сходиться все ближе и ближе другъ къ другу; вслѣдствіе этого кривая $A'B'C'$... будетъ имѣть свое отклоненіе постепенно измѣняющимся, даже въ предѣлѣ, вдоль своей дуги и будетъ допускать, по крайней мѣрѣ до перваго порядка, въ своихъ

отношеніяхъ со всей неподвижной прямой, которая будетъ пересѣкать ее въ двухъ все болѣе и болѣе сосѣднихъ точкахъ, — обыкновенную теорію контактовъ, данную на стр. 188. Каждое пересѣченіе, B' напр., будетъ находиться очень близко отъ центра кривизны соотвѣтствующей точки B кривой, центра, который будетъ его предѣльнымъ положеніемъ, если слѣдующая нормаль $CC'B'$ неопредѣленно приближается къ $BB'A'$. Слѣдовательно эволюта есть предѣлъ перемѣнной кривой $A'B'C'$. . Но послѣдняя владѣетъ двумя точками, стремящимися совпасть и общими съ одной какой-либо изъ нормалей, предположенной неподвижной, $BB'A'$ напр., именно A' и B', гдѣ происходятъ пересѣченія $BB'A'$ съ двумя, предыдущей и послѣдующей, нормалями. Поэтому, такъ какъ два подобныхъ пересѣченія дѣлаются въ окончательномъ видѣ контактомъ перваго порядка (стр. 188), то предѣльная линія, т.-е. эволюта вполнѣ касательна къ $BB'A$ въ самомъ центрѣ круга-касательнаго для точки B данной кривой.

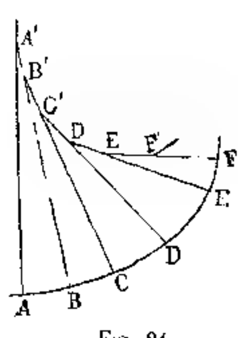


Fig. 24.

Отсюда видно, что, если взять на кривой и на ея эволютѣ, двѣ соотвѣтствующія дуги, соединяющія концы двухъ безконечно сосѣднихъ радіусовъ кривизны данной кривой, то уголъ между этими двумя радіусами, нормалями къ одной изъ кривыхъ и касательными къ другой, будетъ одинаково угломъ смежности обѣихъ дугъ. Такимъ образомъ, двѣ соотвѣтственныя дуги кривой и ея эволюты имѣютъ одинъ и тотъ же уголъ смежности.

Второе общее свойство состоитъ въ томъ, что *всякая дуга эволюты, могущая быть пройденной отъ одного конца до другого мобилемъ, идущимъ по направленію данной кривой, т.-е. въ направленіи ея радіусовъ кривизны, имѣетъ для своей длины разность между первымъ изъ этихъ радіусовъ, выходящимъ изъ точки отправленія, и послѣднимъ, выходящимъ изъ точки прибытія.*

Напр., для эволюты $A'G'$, (fig. 25) которую можно предположить описываемою, отъ A' къ G', мобилемъ, идущимъ безъ остановки по направленію радіуса кривизны $A'A$, или $B'B$, или $C'C$, etc. данной кривой AG, будетъ равняться полному уменьшенію $A'A - G'G$, получаемому этимъ радіусомъ кривизны отъ одного конца дуги до другого. Очевидно, достаточно, чтобы доказать это, получить, что какой-либо $C'D'$ изъ безконечно-малыхъ путей, проходимыхъ такимъ образомъ послѣдовательно, имѣетъ для своего значенія соотвѣтствующее уменьшеніе $C'C - D'D$, радіуса кривизны.

А это можно видѣть, проектируя на первый, $C'C$, изъ этихъ радіусовъ смѣшанную линію $C'D'DC$, оканчивающуюся съ нимъ на однихъ

и тѣхъ же концахъ и образующуюся вторымъ радіусомъ $D'D$, приложеннымъ къ двумъ соотвѣтствующимъ дугамъ $C'D'$, CD, которыя эти радіусы отсѣкаютъ на двухъ кривыхъ. Часть $C'D'$ будетъ проектирована подъ углами, меньшими угла, $CED = d\vartheta$, двухъ радіусовъ и, слѣдовательно, въ истинную величину съ безконечно малыми пренебрегаемыми ошибками: иначе говоря, $C'D'$ будетъ имѣть съ своей проекціей на $C'C$ отношеніе, стремящееся къ единицѣ, и можетъ замѣнить ее. Что касается до дуги DC, то очевидно, что она, будучи проектирована на свою нормаль $C'C$ подъ углами, почти прямыми, дастъ проекцію, имѣю-

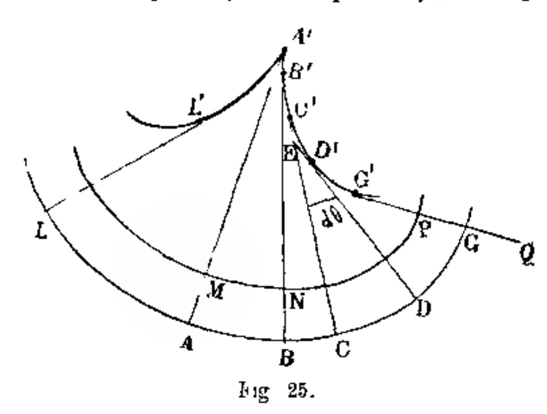


Fig 25.

щую съ ней уничтожающееся отношеніе или будетъ равняться безконечно малой части либо CD'а, либо даже соотвѣтствующей дуги $C'D'$ эволюты. На самомъ дѣлѣ, двѣ соотвѣтственныя конечныя и, слѣдовательно, сравнимыя дуги двухъ кривыхъ, какъ напр. AG и $A'G'$, получаютъ одно и то же неопредѣленно увеличивающееся число элементарныхъ дугъ, такихъ, какъ CD при одной и $C'D'$ при другой. Поэтому, отношеніе CD къ $C'D'$ вообще есть порядка отношенія AG'а къ $A'G'$ и, слѣдовательно, конечно. А это вполнѣ позволяетъ сказать, что проекція DC'а на $C'C$ будетъ пренебрегаться передъ проекціей $C'D'$'а. Остается вычислить проекцію, $D'D \times \cos CED$ или $D'D \times \cos d\vartheta$, прямолинейной и главной части $D'D$ смѣшанной линіи. Замѣнимъ здѣсь $\cos d\vartheta$ его весьма сходящимся выраженіемъ въ видѣ серіи $1 \quad \frac{d\vartheta^2}{1.2} + \ldots$, которое, въ виду безконечно приближеннаго значенія $\frac{ds}{R}$ или $\frac{CD}{D'D}$ угла смежности $d\vartheta$, можетъ быть написано въ видѣ $1 - \frac{1}{2}\left(\frac{CD}{D'D}\right)^2 + \ldots$ Получится для искомой проекціи $D'D$'а, съ несравненно меньшей, чѣмъ второй написаный членъ, ошибкой, разность $D'D - \frac{CD}{2} \frac{CD}{D'D}$ или $D'D - CD \times \frac{d\vartheta}{2}$. Можно видѣть, что эта разность равна $D'D$, исклю-

чая безконечно малую часть дуги CD или сравниваемой съ нею дуги $C'D'$, часть, снова пренебрегаемую передъ $C'D'$. Поэтому въ суммѣ проекція $C'C$ смѣшанной линіи $C'D'DC$ приводится къ $C'D'+D'D$ или разность $C'C-D'D$ приводится къ $C'D'$; и предѣльное отношеніе проходимой дуги $C'D'$ къ одновременному уменьшенію $C'C'-D'D$ радіуса кривизны вполнѣ равняется единицѣ.

Называя черезъ R_0 первый радіусъ кривизны, черезъ R — другой какой-либо изъ этихъ радіусовъ, выходящій изъ точки (x_1, y_1) эволюты, наконецъ черезъ s_1 — отсѣкаемую дугу послѣдней, мы можемъ приложить къ системѣ четырехъ уравненій (1), (2) и $F(x, y)=0$ пятое соотношеніе $s_1=R_0 \quad R$; а исключеніе напр. x'а, y, y_1, R среди этихъ пяти уравненій, всегда производимое алгебраически, если $F(x, y)$ есть полиномъ, дастъ между s_1 и x_1 соотношеніе формы $\varphi(x_1, s_1)=0$, гдѣ φ будетъ новымъ полиномомъ, когда $F(x, y)$ будетъ имъ. Поэтому, *когда кривая есть эволюта другой алгебраической кривой, то ея дуга равна алгебраической функціи ея координатъ.* Поэтому ее называютъ *выпрямляемой,* чтобы обозначить, что ея длина выражается, по крайней мѣрѣ неявно, въ конечной формѣ.

По предыдущему доказательству того, что дуга, описываемая на эволютѣ, не будетъ представлять рѣзкаго измѣненія направленія, радіусъ R данной кривой будетъ итти безпрерывно уменьшаясь, если мобиль идетъ по этой кривой такъ, какъ мы допустили, или увеличиваясь, если движеніе происходитъ въ обратномъ смыслѣ, т.-е. отъ G' къ A'. Поэтому, такъ какъ мы предположили, что двѣ кривыя нигдѣ не прерываются то радіусъ кривизны можетъ сдѣлаться minimum'омъ или maximum'омъ только въ присутствіи или угловой точки, или точки поворота эволюты, что мы можемъ видѣть въ точкѣ A' предыдущей фигуры, гдѣ эволюта $G'A'$ продолжается къ L', измѣняя рѣзко направленіе, тогда какъ кривая GA прямо протягивается къ L. Но два радіуса кривизны данной кривой, касательные въ угловой точкѣ эволюты, будутъ заключать, очевидно, между собой безконечность другихъ радіусовъ, выходящихъ изъ этой самой точки, такъ какъ данная кривая предполагается безпрерывной; и эти радіусы, отсѣкающіе только нулевую дугу эволюты, будутъ равными между собой, вслѣдствіе чего данная кривая здѣсь обращается въ дугу круга, описываемаго вокругъ угловой точки, какъ центра. Слѣдовательно, радіусъ здѣсь не будетъ ни maximum'омъ, ни minimum'омъ, но постоянною величиной. Изъ этого слѣдуетъ, что *эволюта кривой представляетъ поворотъ въ точкѣ отправленія каждаго изъ радіусовъ максимальной или минимальной кривизны этой кривой.*

Собственная кривизна эволюты безконечна въ подобныхъ точкахъ; такъ какъ при общемъ углѣ смежности $d\vartheta$ двухъ кривыхъ, который будетъ перваго порядка малости, на самомъ дѣлѣ максимальный или минимальный радіусъ кривизны будетъ варіировать, согласно принципу Фермата, только на количество высшаго порядка и такъ какъ это ко-

личество, будетъ равняться соотвѣтствующей дугѣ ds_1 эволюты, то дѣля $d\vartheta$ на ds_1, чтобы получить кривизну, мы получимъ вполнѣ безконечное частное.

131. Образованіе кривой посредствомъ развертыванія эволюты.

Второе главное свойство, которое дѣлаетъ изъ радіуса кривизны $A'A$ (стр. 204), или, по крайней мѣрѣ, изъ его превышенія надъ $G'G$ *способъ развертыванія* (développement) линіи $A'G'$, есть именно то свойство, которое оправдываетъ названіе *эволюты* (développée), данное этой линіи. Присоединенное къ первому свойству, оно приводитъ къ любопытному способу образованія данной кривой AG посредствомъ натянутой нити.

Представимъ себѣ, что взятъ край гладкаго тѣла, имѣющій форму эволюты и что это тѣло перенесено на плоскость предыдущей фигуры, такъ что оно оканчивается по дугѣ $L'A'G'$ и оставляетъ свободнымъ пространство, заключенное между этой дугой и данной кривой LAG. Предположимъ, что гибкая и нерасширяющаяся нить $A'G'G$ укрѣплена въ A', затѣмъ, прилегая къ тѣлу, слѣдуетъ эволютой вплоть до G' и протягивается, наконецъ, касательно къ ней, вплоть до своего свободнаго конца G, гдѣ укрѣпляется карандашъ. Теперь, если держать натянутую нить и заставить двигаться карандашъ отъ G къ A, то ясно, что все болѣе и болѣе увеличивающаяся часть нити будетъ развертываться, и въ каждое мгновеніе несвернутая часть будетъ, по своему натяженію, касательной къ $A'G'$ или, слѣдовательно, нормалью къ AG. Но эта вторая часть, которая будетъ увеличиваться на всю такимъ образомъ развернутую дугу эволюты, напр. на $G'C'$, будетъ оставаться постоянно, по второму свойству, равною по длинѣ радіусу кривизны AG'a, т.-е. $C'C$'у, когда развернутая часть будетъ $G'C'$; а, слѣдовательно, движущійся конецъ нити, тогда находящійся въ C, не покинетъ кривую. А это позволяетъ сказать, что карандашъ опишетъ кривую GA безпрерывнымъ образомъ, какъ онъ описалъ бы окружность, если бы эволюта обратилась въ точку. За A нить, сдѣлавшаяся $A'A$, будетъ свертываться на вторую вѣтвь $A'L'$ эволюты и карандашъ будетъ описывать кривую отъ A къ L, etc...

Очевидно, мы пріидемъ къ тому же, если возьмемъ вмѣсто нити линейку, постоянно касающуюся къ тѣлу, изображающему эволюту; эта линейка будетъ вращаться по этому тѣлу, не скользя, т.-е. такимъ образомъ, что ея часть, заключенная съ одной и той же стороны точки контакта, будетъ измѣняться постоянно на количество, равное дугѣ эволюты, касающейся ея. Карандашъ, укрѣпленный на концѣ этой линейки и находившійся сперва въ G, образуетъ на плоскости кривую GA.

132. — Объ эвольвентахъ кривой.

Но если подвижный конецъ G нити или линейки описываетъ кривую GA въ то время, какъ эволюта развертывается или линейка вращается на ней, то какія кривыя опишутъ другія точки этой нити или линейки, напр. точка P?

Чтобы видѣть это, представимъ себѣ, что начиная съ точки P (стр. 205) постепенно проводится линія $P \ldots NM$, пересѣкающая подъ прямымъ угломъ всѣ нормали кривой GA. Эта линія будетъ имѣть, слѣдовательно, для нормалей нормали данной кривой и, давая мѣста тѣмъ же самымъ послѣдовательнымъ пересѣченіямъ этихъ нормалей, не будетъ имѣть другихъ центровъ кривизны, какъ только тѣ, которые принадлежатъ данной кривой, ни другую эволюту, какъ ея $G'A'L'$. Достаточно приложить линейку или нить, оканчивающіяся сначала въ P, для того, чтобы ихъ развертываніе или свертываніе заставило подвижный конецъ, сдѣлавшійся P, пройти кривую $P \ldots NM$. Слѣдовательно, *всѣ точки нити или ея продолженія GQ и всѣ точки линейки, которыя можно представить безконечными въ обоихъ смыслахъ, описываютъ кривыя, имѣющія общія нормали, одни и тѣ же центры кривизны и одну и ту же эволюту*. Эти кривыя, соотвѣтственные элементы которыхъ параллельны (какъ перпендикуляры къ одному и тому же направленію нити или линейки), составляютъ то, что называютъ *группой параллельныхъ линій*, по крайней мѣрѣ, когда ихъ берутъ всѣ съ одной и той же стороны эволюты; и тогда наикратчайшее разстояніе отъ какой-либо точки одной изъ этихъ линій до другой сосѣдней будетъ, очевидно, измѣряться неизмѣняемой частью нити или линейки, которую онѣ заключаютъ между собой. Въ обратномъ случаѣ, онѣ скорѣе будутъ заслуживать названіе *антипараллельныхъ линій*, такъ какъ ихъ соотвѣтственныя части будутъ расположены симметрично съ обѣихъ сторонъ эволюты и, слѣдовательно, будутъ слѣдовать *перекрещивающимся* или обратнымъ *порядкомъ*. Въ обоихъ случахъ всѣ эти линіи называются *эвольвентами* ихъ общей эволюты.

Такимъ образомъ *эвольвентой* кривой называютъ линію, описываемую всякой точкой прямой, вращающейся по этой кривой, или всякой точкой нити, сначала свернутой по ней, а затѣмъ развертывающейся.

Замѣтимъ, что безконечно-малое движеніе нити, отъ $C'C$ до $B'B$ напр., можетъ быть ассимилировано съ вращеніемъ прямой части $C'C$ этой нити вокругъ ея настоящей или соотвѣтствующей C' точки контакта съ эволютой. Это слѣдуетъ изъ того, что такъ какъ C' — центръ круговъ-касательныхъ, проходящихъ ко всѣмъ эвольвентамъ въ ихъ точкахъ, расположенныхъ на $C'C$, то окружности, описанныя по различнымъ точкамъ прямой $C'C$, во время вращенія вокругъ C', имѣютъ контактъ второго порядка съ кривыми GA, PM,... и удаляются отъ

нихъ, между двумя сосѣдними положеніями $C'C$, $B'B$ нити, только на разстоянія третьяго порядка малости.

133. Радіусъ кривизны коникъ.

Посмотримъ, къ какимъ результатамъ приведутъ предыдущія теоріи въ случаѣ кривыхъ второй степени. Но сначала вычислимъ по формулѣ (5) [стр. 199], гдѣ нормаль N имѣетъ выраженіемъ $y\sqrt{1+y'^2}$, радіусъ R круга-касательнаго этихъ кривыхъ.

Возьмемъ ихъ уравненіе въ формѣ, которую онѣ допускаютъ, когда ихъ относятъ къ фокусной оси, взятой за ось x'овъ, и къ касательной въ ихъ вершинѣ, взятой за ось y'овъ, такъ что положительные x'ы будутъ на сторонѣ вѣтвей кривой. Какъ извѣстно, мы будемъ имѣть

(10) $$y^2 = 2px - (1-e^2)x^2,$$

такъ какъ положительныя постоянныя p и e будутъ соотвѣтственно *полу-параметромъ* $\frac{b^2}{a}$, частнымъ отъ дѣленія квадрата половины не-фокусной оси b на половину фокусной оси a, и *эксцентрицитетомъ,* отношеніемъ къ этой половинѣ фокусной оси a половины фокуснаго разстоянія $\sqrt{a^2 \mp b^2}$, меньшимъ единицы въ эллипсѣ, большимъ единицы въ гиперболѣ и наконецъ равнымъ единицѣ въ промежуточномъ и предѣльномъ случаѣ параболы, гдѣ a дѣлается безконечностью, а b числомъ, сравнимымъ только съ $\sqrt{a}$.

Будучи продифференцировано два раза, это уравненіе (10) даетъ, если раздѣлить еще на 2,

(11) $$yy' = p - (1-e^2)x, \quad y'^2 + yy'' = e^2 - 1.$$

Первое изъ нихъ, возведенное въ квадратъ, показываетъ, что $y^2y'^2$ имѣетъ для своего значенія $p^2 - (1-e^2)[2px - (1-e^2)x^2]$ или, по (10), $p^2 - (1-e^2)y^2$. Квадратъ поднормали yy' и нормаль N или $\pm\sqrt{y^2+y^2y'^2}$ будутъ поэтому

(12) $$y^2y'^2 = p^2 - (1-e^2)y^2, \quad N = \pm p\sqrt{1+\frac{e^2y^2}{p^2}},$$

выраженіями немного болѣе простыми, чѣмъ тѣ, которыя получились бы, если бы не вводить на мѣсто абсциссы x ординату y.

Числитель выраженія (5) R'а такимъ образомъ есть извѣстное число. Что касается до знаменателя y^3y'', то послѣднее (11), будучи умножено на y^2, даетъ его, если оставить въ одной части уравненія членъ y^3y'', а $y^2y'^2$ замѣнить его значеніемъ (12). Получается

(13) $$y^3y'' = -p^2;$$

и значенія (13), (12) для y^3y'' и N измѣнятъ наконецъ общую формулу (5) въ

(14) $$R = \frac{N^3}{p^2} = \mp p\left(1 + \frac{e^2y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Итакъ, если исключить знакъ, который противоположенъ знаку ординаты, то *радіусъ кривизны коническаго сѣченія равняется частному отъ дѣленія куба нормали на квадратъ полупараметра.* А это значитъ, что онъ варіируетъ, отъ одной до другой точки, пропорціонально кубу нормали, которая увеличивается сама вмѣстѣ съ абсолютной величиной ординаты y, т.-е. съ разстояніемъ $\pm y$ до фокусной оси. Поэтому, его минимальное значеніе, выражающееся просто черезъ p или $\frac{b^2}{a}$, находится на концахъ фокусной оси при $y = 0$; и онъ достигаетъ, какъ и y^2, maximum'а только въ эллипсѣ, при $y^2 = b^2$, т.-е. на концахъ малой оси. Этотъ максимальный радіусъ кривизны, въ виду соотвѣтствующаго значенія $\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\frac{a^2}{b^2}$, которое получаетъ $e^2\frac{y^2}{p^2}$, будетъ равняться $p\frac{a^3}{b^3}$ или $\frac{a^2}{b}$. Такимъ образомъ, *во всякой вершинѣ конической линіи радіусъ кривизны равенъ частному отъ дѣленія квадрата перпендикулярной полуоси на полу-ось, которая въ этой вершинѣ оканчивается.*

135. — Эволюта параболы; развертываніе второй кубической параболы.

Перейдемъ къ разсмотрѣнію эволюты коническихъ сѣченій; начнемъ съ параболы, гдѣ условіе $e = 1$ приводитъ уравненіе (10) кривой къ $y^2 = 2px$.

Замѣнимъ въ соотношеніяхъ (2) (стр. 196) множитель y', сумму $y'^2 + yy''$ и затѣмъ множитель y'', которые фигурируютъ въ первыхъ частяхъ, ихъ соотвѣтственными значеніями $\frac{p}{y}$, 0, $-\frac{p^2}{y^3}$, получающимися изъ (11) и (13); эти уравненія (2) будутъ

(17) $$x - x_1 + p - \frac{py_1}{y} = 0, \quad 1 + \frac{p^2y_1}{y^3} = 0.$$

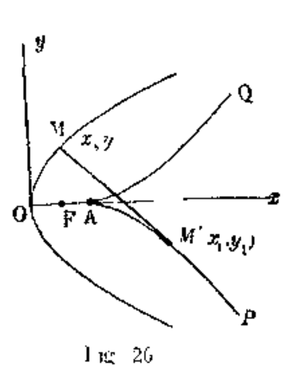
Подставляя въ первое изъ нихъ значеніе y_1, которое дастъ второе, и затѣмъ замѣняя множитель y^2, который будетъ фигурировать тогда въ членѣ этой первой формулы (17), его значеніемъ $2px$, выводимымъ изъ уравненія кривой, мы получимъ вмѣсто (17), рѣшивъ ихъ по отношенію къ x и y^3,

(18) $$x = \frac{x_1 - p}{3}, \quad y^3 = -p^2y_1.$$

Согласно указанію № 129 (стр. 203) остается, чтобы получить уравненіе эволюты, только вставить эти значенія x^3'а и y^3'а въ уравненіе параболы, написанное не въ видѣ $y^2=2px$, но, посредствомъ возведенія въ кубъ, нисколько не измѣняющаго уравненіе съ дѣйствительными перемѣнными, въ видѣ $(y^3)^2=8p^3x^3$. Такимъ образомъ получится, послѣ дѣленія на p^4,

$$(19) \qquad y_1^2=\frac{8}{27p}(x_1-p)^3.$$

Въ немъ можно узнать уравненіе второй кубической параболы PAQ*), которая, естественно имѣетъ за ось симметріи ось x'овъ или самой параболы OM, а точку поворота A въ концѣ $x_1=p$ минимальнаго радіуса кривизны OA или p, и которая, начинаясь съ точки A, такимъ образомъ расположенной на разстояніи отъ вершины O, равняющемся удвоенному разстоянію фокуса F параболы, простирается въ безконечность. Чтобы получить центръ кривизны для какой-либо точки параболы, $M(x, y)$ напр., достаточно привести къ послѣдней нормаль MM' до соприкосновенія, въ M', съ противоположной вѣтвью AP эволюты: M' есть требуемый центръ.



Фиг. 26

По второму общему свойству эволютъ дуга AM' второй кубической параболы PAQ, считаемая отъ точки поворота A до какой-либо точки $M'(x_1, y_1)$, равняется разности, $M'M-AO$, или $\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}-p$, двухъ соотвѣтствующихъ радіусовъ кривизны *ея развернутой параболы* OM; и формулы (18), (19) легко даютъ эту разность въ видѣ явной алгебраической функціи отъ x. Итакъ, *вторая кубическая парабола — развертывающаяся кривая*.

136. — Эволюты эллипса и гиперболы.

Въ случаѣ эллипса и гиперболы эволюта, всегда допускающая, очевидно, тѣ же виды симметріи, что и ея кривая, позволяетъ получить центръ, какъ и эти коническія кривыя; но переносить туда на-

---

* Рѣчь о этой кривой, ордината которой, выходящая изъ ея оси, имѣетъ свой квадратъ пропорціональнымъ кубу абсциссы, считаемой отъ ея вершины A, была въ части II въ № 122. Но легко понять, что ея форма есть форма PAQ, что ея двѣ симметричныя вѣтви AQ, AP имѣютъ свою касательную сначала лежащею въ A на оси Ax, затѣмъ, по мѣрѣ удаленія отъ A, наклоняющеюся къ этой оси на все большій и большій уголъ и что, слѣдовательно, направленіе кривой, описываемой отъ P къ A, и отъ A къ Q, рѣзко измѣняется на два прямыхъ въ точкѣ A, называемой *точкой поворота*.

чало координатъ — очень выгодно. Извѣстно, что эта перемѣна даетъ для уравненія кривой

(20) $$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Но такъ какъ эта перемѣна состоитъ просто въ замѣнѣ прежней абсциссы x абсциссой $x\pm a$, или въ увеличеніи абсциссы на простое постоянное, то ни въ какой точкѣ кривой ничто не измѣнится ни въ ординатѣ y, ни въ отклоненіи y', ни въ его быстротѣ варіированія y''; и предыдущія формулы, гдѣ x не входитъ, останутся въ томъ же видѣ. Поэтому можно, по второму (11) и по (13), замѣнить во второмъ уравненіи (2) y'^2+yy' черезъ e^2-1 и y'' черезъ $-\frac{p^2}{y^3}$. Это второе уравненіе (2), долженствующее опредѣлять ординату y_1 центра кривизны, дѣлается тогда, если рѣшить его по отношенію къ y^3 и если, останавливаясь сначала на случаѣ эллипса, подставить въ окончательномъ видѣ вмѣсто e^2 и p ихъ значенія $\frac{a^2-b^2}{a^2}$ и $\frac{b^2}{a}$,

(21) $$y^3=-\frac{p^2y_1}{e^2}=\frac{b^4y_1}{b^2-a^2}.$$

Но симметрія уравненія (20) кривой по x и y, a и b, если взять при второмъ членѣ верхній знакъ $+$, дѣлаетъ очевиднымъ, что, если принять ось x'овъ за ось y'овъ и наоборотъ, то тогда теперешняя абсцисса x_1 центра кривизны и абсцисса x соотвѣтственной точки эллипса будутъ фигурировать въ уравненіи (21) подъ видомъ y, y_1 съ взаимной перемѣной a и b.

Поэтому вмѣсто вычисленія x_1'а по первому уравненію (2) можно изъ (21) непосредственно получить

(22) $$x^3=\frac{a^4x_1}{a^2-b^2}.$$

Таковы формулы, которыя заступаютъ мѣсто предыдущихъ (17) случая параболы. Чтобы упростить ихъ, примемъ

(23) $$A=\frac{a^2-b^2}{a},\qquad B=\frac{a^2-b^2}{b}$$

и тогда получимъ, извлекая кубическіе корни изъ соотвѣтствующихъ частей (22) и (21), затѣмъ дѣля на a или на b,

(24) $$\frac{x}{a}=\left(\frac{x_1}{A}\right)^{\frac{1}{3}},\quad \frac{y}{b}=-\left(\frac{y_1}{B}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Эти значенія $\frac{x}{a}$ и $\frac{y}{b}$, введенныя въ уравненіе (20), гдѣ второй членъ получаетъ знакъ $+$, дадутъ, слѣдовательно, какъ уравненіе эволюты эллипса,

$$(25) \qquad \left(\frac{x_1}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_1}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Эта кривая имѣетъ форму $PQP'Q'P$ съ четырьмя точками поворота въ концахъ P, Q, P', Q' минимальныхъ и максимальныхъ радіусовъ кривизны, AP, BQ, $A'P'$, $B'Q'$. При фокусномъ полуразстояніи $\sqrt{a^2-b^2}=$ постоянному ae, ея полуоси, OP или $OP'=A$ и OQ или $OQ'=B$, будутъ, по ихъ значенію (23), обратно пропорціональны соотвѣтствующимъ полуосямъ a и b эллипса. Первая, OP или A, очевидно, равняется ae^2 и меньше, значитъ, чѣмъ фокусное полуразстояніе $OF=ae$; слѣдовательно, вершины P и P' будутъ всегда находиться въ эллипсѣ между двумя фокусами F и F'. Вторая же полуось OQ или B имѣетъ своимъ отношеніемъ къ b, выражающимся черезъ $\frac{a^2}{b^2}-1$, число, меньшее или большее единицы, смотря по тому будетъ ли меньше или больше, чѣмъ $\sqrt{2}$, отношеніе большей оси $2a$ эллипса къ меньшей $2b$: вершины Q и Q' находятся внутри эллипса въ первомъ случаѣ и внѣ — во-второмъ. Когда отношеніе двухъ осей имѣетъ точно промежуточное значеніе $\sqrt{2}$ или когда фокусное разстояніе FF' равняется малой оси BB', то Q совпадаетъ съ B', Q' — съ B, а P и P' находятся въ срединѣ прямыхъ OA, OA', въ виду чего первая формула (23) даетъ тогда $A=\frac{1}{2}a$: минимальные радіусы кривизны будутъ равняться, слѣдовательно, половинѣ большей полуоси, а максимальные радіусы кривизны — удвоенной малой полуоси.

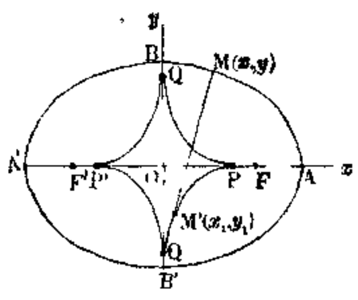


Fig. 27.

Каково бы ни было отношеніе a'а къ b, формулы (24) доказываютъ, что x_1 и x имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, а y_1 и y — различные знаки. Поэтому центръ кривизны для какой-либо точки $M(x, y)$ эллипса получится, если провести нормаль MM' до ея контакта, въ M', послѣ пересѣченія фокусной оси, съ дугой PQ эволюты, расположенной (дугой) съ той же самой стороны малой оси, съ какой и данная точка M.

Когда эллипсъ приближается къ кругу или когда эксцентрицитетъ e стремится къ нулю, отношеніе B къ A стремится къ 1 и уравненіе (25)

эволюты, умноженное на $A^{\frac{2}{3}}$, дѣлается въ предѣлѣ $x_1^{\frac{2}{3}}+y_1^{\frac{2}{3}}=A^{\frac{2}{3}}$: эта кривая получитъ, значитъ, двѣ новыя оси симметріи, биссектрисы угловъ между осями координатъ, такъ какъ x_1 и y_1 здѣсь входятъ симметрично. Но если только эллипсъ не сдѣлается безконечнымъ и не будетъ сохранять между своими двумя осями разность $2(a-b)$ конечною (этой разности будетъ соотвѣтствовать тогда безконечно-увеличенное фокусное полуразстояніе $\sqrt{a^2-b^2}$ или $\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}$), — эта эволюта будетъ неопредѣленно уменьшаться или собираться, такъ сказать, вокругъ центра O. Дѣйствительно ея полуось $A=ae^2$ будетъ приблизительно изображать разность $2(a-b)=2a(1-\sqrt{1-e^2})$ двухъ осей эллипса, какъ это показываетъ разложеніе

$$\sqrt{1-e^2}=(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$$

по формулѣ бинома, съ уничтоженіемъ членовъ по e^4 и выше. Такимъ образомъ эволюта круга обращается въ его центръ; это и было очевидно.

Для разсмотрѣнія эволюты гиперболы мнѣ достаточно будетъ замѣтить, что, такъ какъ уравненіе этой конической линіи получается отъ простого измѣненія b^2 въ $-b^2$ въ уравненіи эллипса, то нужныя исчисленія будутъ простымъ повтореніемъ предыдущихъ; дѣйствительно измѣненіе b^2 въ $-b^2$ не измѣнитъ ничего въ разсужденіяхъ, такъ какъ b фигурируетъ только въ своемъ квадратѣ въ такъ формулахъ (21), (23) и (25). Послѣдняя, которая согласно выраженіямъ (23) A и B есть

$$\left[\frac{x_1^2}{\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[\frac{y_1^2}{\frac{(a^2-b^2)^2}{b^2}}\right]^{\frac{1}{3}}=1,$$

дастъ, какъ уравненіе эволюты гиперболы,

$$\left(\frac{x_1}{A}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{y_1}{B}\right)^{\frac{2}{3}}=1, \tag{26}$$

если положить

$$A=\frac{a^2+b^2}{a}, \qquad B=\frac{a^2+b^2}{b}. \tag{27}$$

Эта кривая напоминаетъ по своей общей формѣ, въ каждой изъ своихъ двухъ совершенно различныхъ частей, расположенныхъ съ обѣихъ сторонъ непересѣкающей ихъ оси, эволюту параболы, которую мы уже разсмотрѣли подробно.

137. — Объ анвелопѣ группы плоскостныхъ кривыхъ и, вообще, о линіи, по которой эти различныя кривыя приближаются къ своимъ безконечно-сосѣднимъ кривымъ болѣе, чѣмъ въ другихъ своихъ точкахъ.

(См. прилож. къ гл. X.)

ГЛАВА XI.

Рулеты и циклоида. Плоскостныя кривыя при полярныхъ координатахъ; логариѳмическая спираль.

144. — Рулеты: теорема Декарта относительно ихъ нормалей.

Между плоскостными кривыми, которыя были открыты геометрами XVII вѣка и разсмотрѣніе которыхъ въ эту эпоху сильно подвинуло впередъ науку, въ особенности двѣ: *циклоида и логариѳмическая спираль*, представляютъ исключительный интересъ. Поэтому-то имъ я и удѣляю почти цѣлую главу, послѣднюю относительно плоскостныхъ кривыхъ; начну съ циклоиды, наиболѣе замѣчательной изъ двухъ, какъ по той роли, какую она играетъ въ анализѣ безконечно-малыхъ, такъ и по важнымъ примѣненіямъ ея въ механикѣ. Она входитъ въ классъ кривыхъ, которыя называются *рулетами* и о которыхъ слѣдуетъ сказать сначала нѣсколько словъ.

Предположимъ, что точка M (fig. 28) непрерывно (посредствомъ двухъ прямыхъ MC и MD напр.) связана съ *движущейся* кривой CD, а эта послѣдняя *катится* по неподвижной кривой AB, т.-е. движется около нея, всегда оставаясь касательной къ ней и такимъ образомъ, что дуги одной и той же длины, на обѣихъ кривыхъ, послѣдовательно совпадаютъ точка въ точку: кривая MP, описываемая при этихъ условіяхъ точкой M, будетъ именно тѣмъ, что̀ называютъ *рулетой*. Напр. всякая плоскостная кривая есть по тому, что мы видѣли (стр. 207), рулета, описываемая основаніемъ одной изъ ея нормалей, катящейся по ея эволютѣ; вслѣдстіе этого рулеты могутъ быть расматриваемы, какъ обобщенныя эвольвенты, точно такъ же какъ кривыя — анвелопы*) суть обобщенныя эволюты.

Особенность, которую представляетъ нормаль ко всякой эвольвентѣ, именно оканчиваться въ соотвѣтствующей точкѣ контакта ея прямой — образующей съ эволютой, есть не что иное, какъ частный случай общаго свойства рулетъ, открытаго Декартомъ, и могущаго быть выраженнымъ такъ:

---

*) См. стр. 214.

Нормаль къ рулетѣ проходитъ въ каждое мгновеніе черезъ данную точку контакта движущейся кривой и неподвижной кривой.

Итакъ, требуется доказать, что нормаль, проходящая въ M къ рулетѣ MP есть прямая MI, соединяющая эту точку M съ точкой контакта I кривыхъ AB и CD. Замѣтимъ, на самомъ дѣлѣ, что безконечно-малое перемѣщеніе подвижной фигуры, способное описать дугу MM рулеты, происходитъ посредствомъ движенія дуги, вообще сравнимой, IK' всей кривой CD по ея равнозначущей IK въ неподвижной кривой и влечетъ за собой перемѣщеніе линіи MK', связанной съ подвижной фигурой, въ положеніе $M'K$. Но это перенесеніе можетъ быть ассимилировано съ простымъ вращеніемъ вокругъ точки K. Чтобы увидѣть это, докажемъ, что перемѣщеніе KK' конца K' безконечно-меньше, чѣмъ перемѣщеніе MM' конца M. Проектируемъ обѣ равнозначащія дуги IK, IK' на ихъ общую касательную въ I, что произойдетъ подъ безконечно-малыми углами: отношеніе между этими двумя проекціями будетъ безконечно-мало отличаться отъ единицы, и два основанія, которыя я назову черезъ k и k', перпендикуляровъ, проходящихъ изъ K и K' на касательную, будутъ одинъ отъ другого на разстояніи kk', безконечно меньшемъ, чѣмъ IK или MM'. Кромѣ того, такъ какъ вслѣдствіе контакта этихъ двухъ дугъ IK, IK' съ ихъ касательной въ I два отрѣзка Kk и $K'k'$ отъ K и K' до этой касательной опять безконечно-малы по отношенію къ IK или MM', то очевидно что то же самое будетъ и съ прямой KK', которая соединяетъ эти точки. И если мы сравнимъ, чтобы получить разность $M'J$, два разстоянія KM, KM' отъ точки K до двухъ послѣдовательныхъ точекъ M и M' рулеты, то эта разность между KM и KM' или между KM и $K'M$ будетъ разностью двухъ сторонъ треугольника KMK', имѣющаго KK' за третью сторону, т.-е. она будетъ меньше, чѣмъ KK' и, слѣдовательно безконечно-меньше, чѣмъ дуга или хорда MM'. Итакъ дуга MM' рулеты отличается отъ дуги круга MJ, описываемаго изъ точки K, какъ центра, только на количество JM', имѣющее съ хордой MM' безконечно-малое отношеніе и, слѣдовательно, согласно пропорціи синусовъ, треугольникъ $JM'M$, которой образуется хордой MJ круга, имѣетъ свой уголъ M, противолежащій сторонѣ JM', также безконечно-малымъ. А это позволяетъ сказать, что въ предѣлѣ, гдѣ K обращается въ I и гдѣ хорды MM', MJ, будучи продолжены, дѣлаются соотвѣтственно касательными въ M къ рулетѣ и къ кругу, — эти двѣ касательныя дѣлаются лишь одной и соотвѣтствуютъ одной и той же нормали MI.

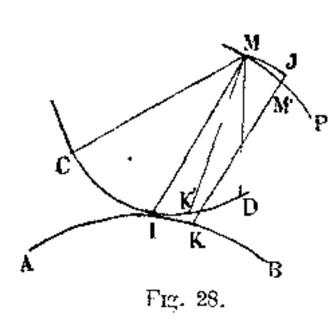


Fig. 28.

Точку I — центръ круговъ, касательно которымъ перемѣщаются такимъ образомъ всѣ точки этой подвижной фигуры, называютъ *мгно-*

венным центромъ вращенія этой фигуры. Дѣйствительно, когда дѣло идетъ только о томъ, чтобы получить *данное* или *мгновенное* направленіе описываемыхъ рулетъ, то послѣднія можно не отличать отъ этихъ самыхъ круговъ или разсматривать движеніе CMD'а, какъ простое вращеніе вокругъ I.

145. — О циклоидѣ; нормаль и касательная къ этой кривой.

Циклоида есть рулета, описываемая всякой точкой окружности, которая катится по неопредѣленной прямой. Если дѣло идетъ напр. объ окружности C, данный радіусъ которой CN будетъ выражаться черезъ r, и если, такъ какъ эта окружность катится по AA', *описывающая точка* есть M, то циклоидой будетъ линія $EASA'E'$. Эта кривая, очевидно, состоитъ изъ безконечнаго числа равныхъ частей, такихъ, какъ ASA', заключающихся между двумя послѣдовательными точками A, A', гдѣ описывающая точка M касается неподвижной прямой AA'. Каждая изъ этихъ частей называется *аркой* циклоиды, а промежутокъ AA', который отрѣзывается на неподвижной прямой, называется *основаніемъ* арки. Когда окружность катится отъ A къ A', то всѣ ея элементы, безконечно малые и все болѣе и болѣе удаляющіеся отъ M вдоль MNT, послѣдовательно накладываются на равные элементы AA''а, все болѣе и болѣе удаляющіеся отъ A; вслѣдствіе этого, строя движущійся кругъ въ различныхъ положеніяхъ, но обязательно въ такомъ, гдѣ описывающая точка будетъ въ вершинѣ S кривой, мы будемъ имѣть:

$$\text{arc}\, NM = NA; \quad \text{arc}\, S'QS \text{ или } \pi r = S'A; \quad \text{arc}\, N'T'M' = N'A.$$

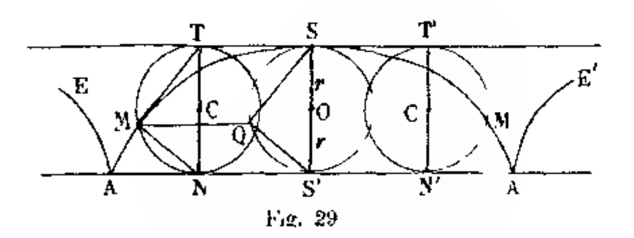


Fig. 29

Наконецъ, въ моментъ, когда описывающая точка придетъ въ A', вся окружность $MNTM$, какъ бы развернется отъ A до A', почему и можно написать $AA' = 2\pi r$. Слѣдовательно, вычитая съ одной стороны AN' изъ AA', а съ другой $N'T'M'$ изъ цѣлой окружности, мы получимъ arc $N'M' = N'A'$. Это равенство позволяетъ намъ сказать, что циклоида могла бы быть описана и точкой M' окружности C', равной предыдущей C, но катящейся отъ точки A', а не отъ A, по основанію AA' въ направленіи отъ A' къ A, а уже не отъ A къ A'. Если предположить, что двѣ подвижныя окружности C и C', описывающія такимъ

образомъ вмѣстѣ циклоиду, остаются постоянно симметричными по отношенію къ перпендикуляру SS', опущенному на AA', то мы будемъ имѣть $S'N' = S'N$ и, слѣдовательно (въ виду того, что $S'A' = S'A = \pi r$), $N'A' = NA$; arc $N'M'$ = arc NM. Поэтому точка M' будетъ симметричной для M по отношенію къ SS'. Такимъ образомъ *арка циклоиды симметрична съ той и другой стороны перпендикуляра, опущеннаго изъ ея вершины на ея основаніе.*

По общему свойству нормалей къ рулетамъ, нормаль, проходящая въ M къ циклоидѣ, проходитъ черезъ соотвѣтствующую точку контакта N подвижной окружности и неподвижной прямой. Касательная же, такъ какъ она должна быть перпендикулярной къ нормали MN, будетъ соединять точку M съ концомъ T діаметра TN, выходящаго изъ N. Дѣйствительно уголъ TMN будетъ прямой, какъ вписанный въ полуокружности. Перемѣстимъ кругъ C въ OSS', заставляя всѣ его точки описывать равныя и параллельныя NS'у линіи: такія фигуры, какъ $MNS'Q$, $MTSQ$ будутъ параллелограммами и хорды QS', QS будутъ сотвѣтственными параллелами MN, MT. Поэтому, не строя круга C, можно было бы провести въ данной точкѣ M касательную и нормаль къ циклоидѣ, проводя изъ M параллель MQ къ основанію AA' до встрѣчи ея съ неподвижнымъ кругомъ O, которая произойдетъ въ точкѣ Q, затѣмъ соединяя эту точку Q съ двумя концами діаметра SS' и проводя наконецъ параллели MT и MN къ этимъ двумъ прямымъ QS, QS'.

При концахъ A и A' арки касательная будетъ, очевидно, перпендикулярна къ основанію AA', такъ какъ она будетъ параллелью къ $S'S$: поэтому *въ точкѣ, гдѣ двѣ смежныя арки соединяются, касательная принадлежитъ обѣимъ аркамъ, и кривая представляетъ здѣсь то, что называютъ поворотомъ перваго рода.*

146. — Эволюта и радіусъ кривизны циклоиды.

Пусть ASA' (fig. 30) будетъ аркой циклоиды. Проведемъ ниже основанія на разстояніи $S'B$, равномъ *высотѣ* циклоиды SS', параллель HI къ этому основанію AA' и построимъ новую циклоиду ABA', равную первой, но проходящую такимъ образомъ, что двѣ полуарки AB, BA' имѣютъ свою общую точку отправленія на продолженіи SS' и соотвѣтственныя вершины въ A и A'. Полуарка BA можетъ быть предположена описываемою точкой P окружности NPN', которая катилась бы по BH отъ B къ H; вслѣдствіе этого имѣемъ, въ какомъ-либо изъ ея положеній, arc $N'P = N'B = NS'$ и затѣмъ:

$$\text{arc } NP = \pi r - N'P = AS' - NS' = NA.$$

Теперь, если построить при данной циклоидѣ ASA' кругъ — образующій TMN въ положеніи, гдѣ онъ касается въ N равнаго круга NPN',

то соотвѣтствующая точка M этой циклоиды будетъ сама по себѣ такой, что arc $NM = NA$. Поэтому двѣ дуги NP, NM, обѣ равнозначущія NA, равны между собою; а слѣдовательно ихъ дополнительныя PN', MT равны также Изъ этого слѣдуетъ съ одной стороны, что двѣ хорды NP и NM — равны, а съ другой стороны, что два вписанныхъ угла PNN' и MNT, которые измѣряются $\frac{1}{2}PN'$ - $\frac{1}{2}MT$, — равны. А такъ какъ ихъ двѣ стороны NN' и NT, будучи діаметрами, перпендикулярными къ общей касательной AA' къ двумъ кругамъ, находятся на

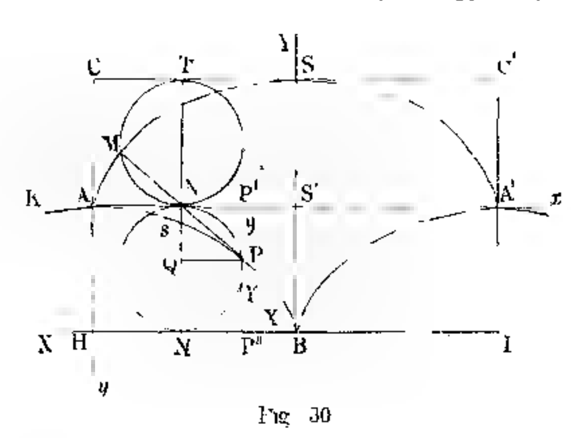


Fig 30

одной прямой, то, слѣдовательно, эти два равныхъ угла PNN' и MNT расположены прямо противоположно своими вершинами, или NP есть продолженіе MN. Кромѣ того, по только что данному правилу построенія нормали и касательной къ циклоидѣ, MN есть нормаль къ первой ASA', а NP — касательная ко второй ABA'. Такъ какъ это вѣрно для всѣхъ возможныхъ соотвѣтственныхъ положеній двухъ круговъ, то можно видѣть, что нормали первой циклоиды совпадаютъ съ касательными второй и что, слѣдовательно, послѣдняя, на которой послѣдовательно пересѣкаются ея собственныя касательныя или безконечно-малыя послѣдовательныя хорды, есть мѣсто послѣдовательныхъ пересѣченій нормалей къ данной циклоидѣ, т.-е. ея собственная эволюта.

Итакъ, *эволюта циклоиды есть равная ей циклоида.*

Кромѣ того соотношеніе $NP = MN$ доказываетъ, что MP есть удвоенное MN, а такъ какъ MP есть, очевидно радіусъ круга-касательнаго для точки M данной кривой, то можно заключить, что *радіусъ кривизны въ циклоидѣ равенъ удвоенной нормали, проведенной отъ кривой вплоть до встрѣчи съ ея основаніемъ.*

147. — Развертываніе циклоиды.

По второму общему свойству эволютъ длина части AP арки BAK..., считаемой отъ вершины A арки, равняется разности двухъ радіусовъ кривизны, проведенныхъ изъ ея концовъ P и A къ ея эвольвентѣ AS.

Одинъ изъ этихъ радіусовъ кривизны есть PM, а другой — нуль (такъ какъ ихъ два конца соединяются въ A); поэтому получаемъ:

$$\text{arc}\, PA = PM = 2PN;$$

а въ мгновеніе, когда подвижная точка P прибудетъ въ B,

$$\text{arc}\, BA = BS = 2BS' = 4r.$$

Полуарка BA равняется поэтому по длинѣ удвоенному діаметру круга образующаго, т.-е. удвоенной своей собственной проекціи BS' на перпендикуляръ къ основанію, а слѣдовательно: *полная арка циклоиды въ четыре раза длиннѣе, чѣмъ ея высота*. Этотъ простой результатъ, которому предшествовало сложное вычисленіе длины дугъ второй кубической параболы (стр. 211), крайне удивилъ геометровъ XVII вѣка, думавшихъ до того времени, что кругъ изъ всѣхъ кривыхъ наименѣе трудный для развертыванія. Длина арки поэтому можетъ быть соизмѣрима съ ея высотой, тогда какъ ея основаніе не допускаетъ этого сравненія, такъ какъ оно равно окружности круга-образующаго или высотѣ, умноженной на $\pi = 3{,}14159\ldots$

Соотношенія arc $PA = 2PN$ непосредственно приводитъ къ важному уравненію. Возьмемъ за ось x'овъ касательную AA', проходящую въ вершинѣ A арки и за ось y'овъ — перпендикуляръ AH, опущенный изъ этой точки A на основаніе арки. Наконецъ, назовемъ черезъ s дугу AP, считаемую положительно, когда какая-либо точка P арки находится на сторонѣ положительныхъ x'овъ, и — отрицательно, когда на противоположной сторонѣ, т.-е. если итти отъ A къ K. Прямая NP, въ прямоугольномъ треугольникѣ, опредѣляемомъ точками N, P, N', будетъ среднимъ пропорціональнымъ между гипотенузой $NN' = 2r$ и отрѣзкомъ $NQ = P'P$, который — не что иное, какъ ордината y точки P. Поэтому будемъ имѣть $NP = \sqrt{2ry}$, и слѣдовательно $AP = 2\sqrt{2ry}$ или $\pm s = 2\sqrt{2ry}$. Возведя это въ квадратъ и рѣшивъ относительно y, мы получимъ искомое соотношеніе

$$(1) \qquad y = \frac{s^2}{8r} = \frac{1}{8r} \cdot s^2.$$

Итакъ, въ аркѣ циклоиды *ордината, проходящая перпендикулярно отъ какой-либо точки арки до касательной въ вершинѣ, пропорціональна квадрату соотвѣтствующей дуги, считаемой отъ вершины*.

148. — Естественное конечное уравненіе и дифференціальное уравненіе циклоиды.

Соотношеніе (1) ясно опредѣляетъ кривую или, въ другихъ словахъ, удовлетворяется только при циклоидѣ; дѣйствительно, начиная съ начала дугъ, гдѣ y уничтожается и гдѣ берутъ это начало за начало абсциссъ x, это соотношеніе послѣдовательно опредѣляетъ эти абсциссы такъ же, какъ и ординаты въ видѣ функціи s'а. На самомъ дѣлѣ, если въ (1) заставить s увеличиться на ds, и слѣдовательно y на dy, то s^2 увеличится на $2ds$, а это даетъ, какъ значеніе dy'а, частное отъ дѣленія sds на $4r$ Но мы знаемъ, что одновременное увеличеніе dx абсциссы *связано съ* dy и ds *посредствомъ соотношенія* $dx^2 = ds^2 - dy^2$. Подставимъ на мѣсто dy его значеніе, затѣмъ раздѣлимъ на ds^2 и извлечемъ корень квадратный, замѣчая, что, начиная съ начала координатъ, приходится считать увеличивающіяся абсциссы въ томъ же направленіи, какъ и увеличивающіяся дуги; вслѣдствіе этого производная отъ x по s должна быть положительной при $s = 0$ и такъ далѣе повсюду, по случаю непрерывности, вплоть до момента, когда она уничтожится. Поэтому получится

$$(2) \qquad \frac{dx}{ds} = \frac{\sqrt{16r^2 - s^2}}{4r}.$$

Послѣдовательныя абсциссы x, слѣдовательно, опредѣляются постепенно соотношеніемъ (1) въ видѣ функціи дугъ s такъ же, какъ ординаты кривой опредѣляются имъ въ видѣ функціи ея абсциссы, когда даютъ, при всѣхъ значеніяхъ послѣдней, начиная съ нулевой ординаты, послѣдовательныя отклоненія y' кривой (стр. 30). Такимъ образомъ между предѣлами $s = \mp 4r$, гдѣ вторая часть соотношенія (2) не уничтожается, кривая, соотвѣтствующая соотношенію (1), имѣетъ вполнѣ опредѣленную форму; и эта кривая не можетъ отличаться отъ арки циклоиды высоты $2r$, которую (арку) мы привели къ этому соотношенію.

Поэтому *соотношеніе (1) ясно характеризуетъ арку циклоиды* и потому, по случаю его крайней простоты, *называется естественнымъ ея уравненіемъ*. Оно дѣлаетъ изъ циклоиды кривую, въ нѣкоторомъ родѣ, наиболѣе элементарную послѣ прямой линіи, если дѣло идетъ о соотношеніяхъ, связывающихъ ординату съ дугой, и удѣляетъ ей первостепенную роль въ нѣкоторыхъ важныхъ вопросахъ механики, гдѣ входятъ пути s, пробѣгаемые мобилемъ, совмѣстно съ ихъ вертикальными проекціями y. На самомъ дѣлѣ въ прямой линіи ордината точно такъ же пропорціональна дугѣ, какъ и абсциссѣ (та и другая считаются съ точки, гдѣ ось абсциссъ пересѣкаетъ линію), а это есть наиболѣе простое изъ возможныхъ соотношеній; но менѣе сложное послѣ этого состоитъ, естественно, въ пропорціональности ординаты къ квадрату дуги. Съ этой

точки зрѣнія существуетъ нѣкоторая аналогія между циклоидой и параболой, которая, отнесенная къ своей касательной въ вершинѣ, какъ къ оси x'овъ и къ соотвѣтственной нормали, какъ къ оси y'овъ, имѣетъ свою ординату пропорціональною квадрату абсциссы. Благодаря этой пропорціональности парабола есть самая простая кривая послѣ прямой линіи съ точки зрѣнія соотношенія, существующаго между ординатой и абсциссой, тогда какъ циклоида есть наипростѣйшая кривая по соотношенію, существующему между ординатой и дугой.

Но въ задачахъ соотношеніе (1) чаще представляется въ видѣ дифференціальнаго уравненія, откуда исключено s. Раздѣлимъ производную y'а по s, которую даетъ это уравненіе (1), на выраженіе (2) аналогичной производной x'а и въ частномъ замѣнимъ s его значеніемъ $\pm\sqrt{8ry}$, полученнымъ изъ (1). Тогда мы будемъ имѣть *дифференціальное уравненіе циклоиды*

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{y}{2r-y}}$$

Если мы предположимъ для даннаго момента y'и за абсциссы, а x'ы за ординаты, то это уравненіе будетъ опредѣлять при всѣхъ абсциссахъ y, начиная съ выбраннаго начала $y=0$, рядъ *отклоненій* $\frac{dx}{dy}$ кривой въ каждомъ изъ четырехъ угловъ координатъ, и слѣдовательно, оно опредѣлитъ послѣдовательно эту кривую съ той и другой стороны оси абсциссъ y, которыя будутъ вполнѣ положительными для того, чтобы радикалъ (3) го оставался дѣйствительнымъ, начиная со значенія $y=0$. А это позволяетъ сказать, что уравненіе (3) можетъ быть удовлетворяемо во всякой другой кривой только аркой циклоиды высоты $2r$ и что оно вполнѣ равнозначуще выраженію (1).

Вмѣсто предыдущихъ осей AA' и AH, перекрещивающихся въ вершинѣ арки, часто принимаютъ за ось x'овъ основаніе BX арки и за ось y'овъ перпендикулярную касательную BS, проведенную къ одному изъ ея концовъ. Новая абсцисса, которую я назову черезъ X, какой-либо точки P арки BAK... предыдущей фигуры (fig. 30), и ея новая ордината, которую я назову черезъ Y, будутъ BP'', $P''P$ и будутъ равняться соотвѣтственно алгебраическимъ разностямъ $AS' \mp AP'$, $P''P' - PP'$, или $\pi r - x$, $2r - y$. Поэтому надо въ формулѣ (3) взять $x = \pi r - X$, $y = 2r - Y$, а слѣдовательно, $dx = -dX$, $dy = -dY$. Тогда получимъ дифференціальное уравненіе циклоиды въ ея болѣе употребительномъ видѣ

$$(4)\qquad \frac{dY}{dX} = \pm\sqrt{\frac{2r}{Y} - 1}.$$

Такъ какъ достаточно, чтобы сдѣлать это уравненіе тождественнымъ (3)'му,

перемѣнить направленіе абсциссъ и направленіе ординатъ, принимая за новое начало координатъ *вершину,* откуда направляется максимальная ордината $Y=2r$ (выше которой радикалъ дѣлается мнимымъ), то это уравненіе, всякій разъ какъ представится при нахожденіи кривой, показываетъ, что кривая принадлежитъ циклоидѣ высоты $2r$, отнесенной къ основанію ея арокъ, взятому за ось X'овъ.

149. — Площади, заключающіяся между аркой циклоиды и ея эволютой или ея основаніемъ.

Хотя вычисленіе площадей относится къ интегральному исчисленію, но воспользуемся еще вышеприложенной фигурой (fig. 30): 1) для того, чтобы получить площадь, заключающуюся между аркой ASA' циклоиды и ея эволютой ABA', и 2) для того, чтобы увидѣть, какимъ образомъ эта поверхность дѣлится основаніемъ AA' арки.

Но сначала замѣтимъ, что такъ какъ полуарки AB, BA' вполнѣ равны какъ по длинѣ, такъ и по фигурѣ полуаркамъ SA' и AS, то соотвѣтственныя фигуры $APBS'$, $A'BS'$ и $SA'C'$, SAC, образуемыя этими кривыми и ихъ крайними касательными, вполнѣ накладываются другъ на друга; вслѣдствіе этого двѣ смѣшанно-линейныя поверхности $APBS'$ и $A'BS'$ могутъ быть перенесены въ $SA'C'$ и SAC. Поверхность, долженствующая быть вычисленной, $ASA'B$ будетъ такимъ образомъ переобразована въ прямоугольникъ $AA'C'C$, площадь котораго равна $AA'\times SS'$ или $2\pi r\times 2r=4\pi r^2$. Слѣдовательно, *площадь, заключенная между аркой циклоиды и ея эволютой, равняется учетверенной площади круга — образующаго циклоиды.*

Чтобы видѣть, какъ основаніе AA' арки дѣлитъ эту поверхность $ASA'B$, раздѣлимъ ее на безконечно-острые треугольники нормалями, какъ MP, которыя пересѣкаются послѣдовательно безконечно близко отъ эволюты и идутъ къ соотвѣтственнымъ вершинамъ этихъ треугольниковъ. Такъ какъ каждая нормаль, какъ мы видѣли, пересѣкается AA' въ своей срединѣ, то часть треугольниковъ, расположенная между AA' и ихъ вершинами, будетъ состоять изъ новыхъ треугольниковъ, имѣющихъ съ предыдущими общій уголъ, но прилежащія стороны наполовину меньшими съ почти безконечно-малыми разностями. Эти частные треугольники поэтому всѣ будутъ равняться, въ предѣлѣ, четверти цѣлыхъ треугольниковъ и, слѣдовательно, часть $AS'A'B$ всей площади $4\pi r^2$ будетъ также четвертью этой площади или будетъ имѣть своей величиной πr^2; а это, умноженное на 3, т.-е. $3\pi r^2$ даетъ часть $AS'A'S$. Такимъ образомъ, *поверхность, заключенная между основаніемъ арки циклоиды и ея эволютой равна поверхности круга - образующаго циклоиды, тогда какъ поверхность, заключенная между аркой и ея основаніемъ есть утроенная поверхность его же.*

150. — Спирали и полярныя координаты.

Представимъ себѣ, что прямая OP вращается вокругъ неподвижной точки O, называемой *полюсомъ*, такимъ образомъ, что уголъ ϑ, который она образуетъ въ плоскости съ неподвижной прямой Ox, безпрестанно увеличивается вплоть до какого-либо числа окружностей, съ того момента (взятаго за начало), когда онъ былъ нулемъ и до котораго онъ былъ отрицательнымъ; кромѣ того, замѣтимъ, что точка M перемѣщается вдоль прямой OP въ то время, какъ она вращается, и что при всякомъ значенiи ϑ эта точка M будетъ такимъ образомъ на разстоянiи r отъ полюса, разстоянiи, выражающемся въ видѣ опредѣленной функцiи ϑ'ы, $f(\vartheta)$, которая вообще не останется однимъ и тѣмъ же, когда ϑ увеличится на 2π, т.-е. когда прямая OP прiйдетъ въ первоначальное положенiе. Подвижная точка M опишетъ въ этомъ двойномъ движенiи извѣстную кривую AMS, которую вполнѣ опредѣляетъ уравненiе $r = f(\vartheta)$ и которую называютъ *спиралью*; ея часть, описываемая въ полный оборотъ OP'а, называется *спиромъ (оборотомъ)*.

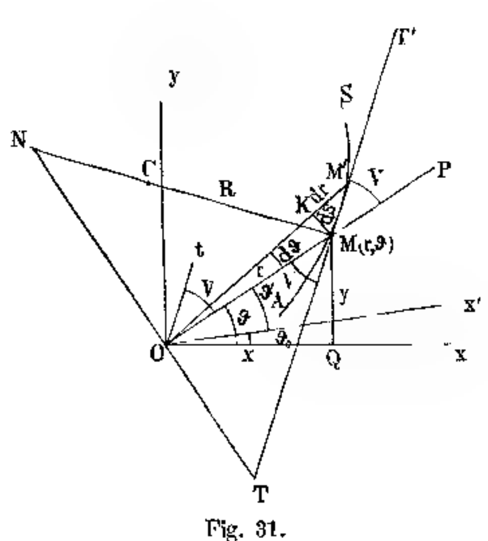


Fig. 31.

Уголъ ϑ, который обыкновенно выбираютъ за независимое перемѣнное, называется, какъ извѣстно, *полярнымъ угломъ* или *азимутомъ*, а разстоянiе r — *радiусомъ-векторомъ*. Эти двѣ перемѣнныя r и ϑ, самыя естественныя, какiя только можно употребить при разсмотрѣнiи движенiй, которыя происходятъ въ плоскости вокругъ точки или оси, составляютъ то, что называютъ *полярными координатами*. Наконецъ, неподвижная прямая Ox, съ которой начинаютъ считать азимуты, называется *полярной осью*.

Если провести черезъ полюсъ перпендикуляръ Oy въ направленiи $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, то два разстоянiя, положительныя или отрицательныя, x и y точки M до этихъ осей Oy и Ox будутъ составлять систему прямоугольныхъ координатъ, которая имѣетъ очень простыя соотношенiя съ полярными r и ϑ. Дѣйствительно, въ прямоугольномъ треугольникѣ OQM x и y, или OQ и QM будутъ, очевидно, $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, при всѣхъ направленiяхъ OM'а, если OM или r есть единица; а слѣдовательно, имѣемъ $x = r\cos\vartheta$ и $y = r\sin\vartheta$, соотношенiя, изъ которыхъ, взявъ

или соотвѣтственныя отношенія ихъ частей, или сумму ихъ квадратовъ, выводятъ обратно $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{y}{x}$, $r^2 = x^2 + y^2$.

Уравненіе $r = f(\vartheta)$ кривой при полярныхъ координатахъ дѣлается поэтому *при прямоугольныхъ координатахъ* $\sqrt{x^2+y^2} = f\left(\operatorname{arc tg}\frac{y}{x}\right)$ и принимаетъ трансцендентную форму, тогда какъ предыдущее — алгебраическое. Обратно, если кривая при прямоугольныхъ координатахъ имѣетъ своимъ уравненіемъ $F(x, y) = 0$, то ея уравненіе при полярныхъ координатахъ будетъ $F(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) = 0$. Послѣднее, когда первое — алгебраическое, не содержитъ непосредственно полярнаго угла ϑ, но только его тригонометрическія линіи $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$, такъ что даетъ для r, x, y однѣ и тѣ же величины, когда ϑ увеличивается на 2π. Поэтому можно заставлять ϑ варіировать только въ интервалѣ 2π или даже только въ интервалѣ $= \pi$, если ввести и отрицательные радіусы r въ противоположность тѣмъ, которые при томъ же значеніи ϑ будутъ положительными; дѣйствительно можно видѣть, что точка, опредѣляющаяся извѣстными значеніями $-r$, ϑ двухъ полярныхъ координатъ, будетъ такой же, какъ и та, для которой эти координаты будутъ r, $\vartheta + \pi$. Выраженія $r\cos\vartheta$, $r\sin\vartheta$ для x и y могутъ быть прилагаемы и съ этими отрицательными значеніями r; дѣйствительно множители r и $\cos\vartheta$, r и $\sin\vartheta$, измѣняя здѣсь просто знакъ, даютъ тѣ же самыя произведенія.

151. Касательная, нормаль, подкасательная, дифференціалъ дуги и радіусъ кривизны при полярныхъ координатахъ.

Пусть будутъ AS (fig. 31) кривая, разсматриваемая при полярныхъ координатахъ, r и ϑ — двѣ координаты какой-либо M изъ ея точекъ; $r = f(\vartheta)$ — ея уравненіе. Взявъ на этой кривой отъ точки M безконечно-малую дугу $MM' = ds$, соотвѣтствующую элементарному увеличенію $MOM' = d\vartheta$ полярнаго угла, проведемъ затѣмъ касательную $TMM'T'$, нормаль MN и перпендикуляръ TN къ радіусу-вектору, проходящій черезъ полюсъ O. *Подкасательной* называютъ часть OT этого перпендикуляра, которая заключена между полюсомъ и касательной, *поднормалью* — часть ON того же перпендикуляра, которая идетъ отъ полюса до нормали; наконецъ *касательной* и *нормалью* — отрѣзки, MT и MN, касательной и нормали, которые, начинаясь съ точки M контакта, достигаютъ концовъ T и N подкасательной и поднормали.

Такъ какъ радіусъ-векторъ $OM = r$ данъ, то всѣ эти прямыя легко могутъ быть вычислены, если узнаемъ уголъ V, который образуется касательной TM', проведенной на сторонѣ, гдѣ ϑ увеличивается, съ продолженіемъ MP радіуса-вектора. Но такъ какъ OM' совпадаетъ въ предѣлѣ съ OM, то уголъ OMT, противоположный и равный V,

можетъ быть замѣненъ угломъ $OM'T$; а если отложить OM на OM' (или на его продолженіи) такъ, чтобы построить равнобедренный треугольникъ MOK, безконечно острый въ O и имѣющій слѣдовательно уголъ K замѣтно прямымъ, то этотъ уголъ $OM'T$ (или его прибавленіе $KM'T$) будетъ однимъ изъ угловъ замѣтно прямоугольнаго треугольника MKM'. Кромѣ того сторона KM' послѣдняго, разность $\pm dr$ двухъ послѣдовательныхъ радіусовъ-векторовъ OM, OM' будетъ равна $\pm r'd\vartheta = \pm f'(\vartheta)\,d\vartheta$, а другая сторона KM почти прямого угла K, хорда дуги круга, описываемаго изъ точки O, какъ центра, съ $OM=r$ за радіусъ, можетъ быть въ предѣлѣ замѣнена этой дугой $OM \times d\vartheta = r\,d\vartheta$. Такъ какъ треугольникъ $M'KM$ отличается, такимъ образомъ, сколь угодно мало отъ прямоугольнаго, то стороны его имѣютъ между собой или съ углами, если исключить ошибки, нулевыя въ предѣлѣ, такія же соотношенія, что и прямоугольный треугольникъ, поэтому и можно написать

$$KM = KM' \operatorname{tg} KM'T$$

т.-е. $$r\,d\vartheta = (\pm dr)(\pm \operatorname{tg} V) = (r'd\vartheta)\operatorname{tg} V.$$

Слѣдовательно получаемъ:

(5) $$\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'} \text{ или } \operatorname{ctg} V = \frac{r'}{r}; \quad V = \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{r'}.$$

Таково выраженіе угла V, который опредѣляетъ направленіе MT' касательной. Изъ него можно вывести, какъ уже было сказано, ON, OT, MN, MT. Напр. треугольникъ OMN, прямоугольный въ O, даетъ

$$ON = OM \,.\, \operatorname{tg} OMN = r \operatorname{tg}\left(\pm \frac{\pi}{2} \mp V\right) = \pm r \operatorname{ctg} V = \pm r'$$

и $$MN = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

Поэтому если назвать для сокращенія черезъ S_n поднормаль, черезъ N — нормаль и придавать поднормали знакъ при r', или считать ее положительно, когда ея азимутъ будетъ $\vartheta + \frac{\pi}{2}$, и отрицательно, когда онъ будетъ $\vartheta - \frac{\pi}{2}$, то мы получимъ:

(6) $$S_n = r' \quad \text{и} \quad N = \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

Дифференціалъ $MM' = ds$ дуги $AM = s$, функціи отъ ϑ, получается не менѣе легко, такъ какъ въ треугольникѣ $M'KM$, безконечно подходящемъ къ прямоугольному, получается въ предѣлѣ

$$MM' = \sqrt{MK^2 + M'K^2}$$

или

(7) $$ds = \sqrt{r^2 d\vartheta^2 + dr^2} = \sqrt{r^2 + r'^2}\,.\,d\vartheta = N\,d\vartheta.$$

Вычислимъ еще уголъ смежности элементарной дуги ds и для этого проведемъ черезъ полюсъ O подвижную прямую Ot, постоянно параллельную касательной MT' въ точкѣ (r, ϑ), которую мы представимъ себѣ перемѣщающеюся вдоль кривой. Эта прямая Ot будетъ образовать съ соотвѣтствующимъ радіусомъ-векторомъ OM уголъ V и, слѣдовательно, съ неподвижнымъ направленіемъ Ox уголъ $\vartheta + V$ или $\vartheta + \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{r}{r'}$. Поэтому если ϑ увеличивается на $d\vartheta$ или если переходитъ отъ M къ M', то дифференціалъ xOt'а, искомый *уголъ смежности*, будетъ послѣдовательно

$$d\vartheta + d\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{r}{r'} = d\vartheta + \frac{r'^2 - rr''}{r'^2 + r^2}\,d\vartheta = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\,d\vartheta.$$

Наконецъ раздѣлимъ выраженіе (7) ds'а на этотъ уголъ смежности и мы получимъ, какъ извѣстно, радіусъ кривизны $MC = R$ кривой для разсматриваемой точки $M\ (r, \vartheta)$:

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}. \tag{8}$$

Это значеніе (8) откладываютъ отъ точки $M(r, \vartheta)$ на сторонѣ MN, которая образуетъ съ MO острый уголъ и *которая есть сторона нормали* N, или на противуположной сторонѣ, смотря по тому, будетъ ли это значеніе положительнымъ или отрицательнымъ, т.-е. смотря по тому, будетъ ли уголъ смежности $d(xOt)$ показывать при переходѣ отъ M къ M' вращеніе касательной MT' въ сторону полюса или въ противуположную сторону и опредѣлять вогнутость кривой на первой сторонѣ или на второй.

Прежде чѣмъ примѣнять къ *логариѳмической спирали* главныя, такимъ образомъ полученныя, формулы, разсмотримъ ту кривую, самую замѣчательную изъ спиралей послѣ нея, но наиболѣе простую и открытую первою, которая называется *спиралью Архимеда*.

152. — Спираль Архимеда и логариѳмическая спираль.

Радіусъ-векторъ въ спирали Архимеда и логариѳмъ радіуса-вектора въ логариѳмической спирали увеличиваются на количества, пропорціональныя соотвѣтственнымъ увеличеніямъ полярнаго угла: таково опредѣленіе этихъ двухъ спиралей.

Въ другихъ словахъ, если a и b обозначаютъ два постоянныхъ, то уравненіе спирали Архимеда есть $r = a\vartheta + b$, а уравненіе логариѳмической спирали есть $\lg r = a\vartheta + b$ или $r = e^{a\vartheta + b}$. Постоянное a можетъ быть принято положительнымъ, такъ какъ, если бы оно не было

такимъ, то для этого достаточно было бы перемѣнить направленіе, по которому считаются положительные полярные углы, или замѣнить ϑ черезъ $-\vartheta$, для того, чтобы членъ $a\vartheta$ измѣнился въ $(-a)\vartheta$; а это дѣлаетъ положительнымъ коэффиціентъ при ϑ. Что касается до постояннаго b, то надлежащее измѣненіе полярной оси заставляетъ его уничтожиться. На самомъ дѣлѣ, представимъ это постоянное черезъ $-a\vartheta_0$, называя черезъ ϑ_0 его частное отъ дѣленія на $-a$, и выберемъ за новую ось Ox' (fig. 31) прямую, выходящую изъ полюса, полярный уголъ которой, по отношенію къ Ox есть ϑ_0 по величинѣ и по знаку. Если мы обозначимъ черезъ ϑ' новый полярный уголъ $x'OM$, равный $xOM \mp xOx'$ или $\vartheta - \vartheta_0$, то, очевидно, мы будемъ имѣть:

$$a\vartheta + b = a(\vartheta - \vartheta_0) = a\vartheta'$$

и соотвѣтственныя уравненія двухъ спиралей сдѣются: $r = a\vartheta'$ и $r = e^{a\vartheta'}$. Въ этой-то крайне простой формѣ обыкновенно и берутъ ихъ, предполагая при этомъ, какъ видно, производство надлежащаго измѣненія полярной оси или, что то же самое, выражая при кривой и при оси Ox' вращеніе вокругъ полюса, равное ϑ_0, въ направленіи отъ Ox' къ Ox, которое уменьшаетъ на ϑ_0 полярныя оси всѣхъ радіусовъ-векторовъ; но тогда можно вмѣсто ϑ' взять ϑ, такъ какъ полярная ось — опять Ox.

Замѣтимъ для этой цѣли, что первое уравненіе логариѳмической спирали, $r = e^{a\vartheta + b}$, можетъ быть написано также и черезъ $r = e^b e^{a\vartheta}$ или $r = Ke^{a\vartheta}$, если назвать черезъ K положительное количество e^b, произвольно взятое между 0 и ∞, когда b находится между $-\infty$ и ∞; отсюда слѣдуетъ, что вращеніе ϑ_0, которое приводитъ радіусы-векторы $e^{a\vartheta + b}$ къ $e^{a\vartheta}$ въ каждомъ направленіи пространства, заключается въ дѣленіи ихъ на K. Поэтому, *когда удлиняютъ или укорачиваютъ въ какомъ-либо одномъ и томъ же отношеніи всѣ радіусы-векторы логариѳмической спирали, то получаютъ ту же самую спираль, которая повернулась только вокругъ полюса на уголъ, пропорціональный логариѳму этого отношенія.* Но если заставить варіировать такимъ образомъ пропорціонально радіусы-векторы и слѣдовательно, всѣ элементы ds данной кривой, не измѣняя ни одного угла, то мы получимъ кривыя, которыя подобны данной. Поэтому, *подобныя логариѳмическія спирали равны между собой;* и, *во всякой логариѳмической спирали двѣ дуги, видимыя изъ полюса подъ однимъ и тѣмъ же угломъ, но совершенно произвольныя, подобны между собой.*

А это, очевидно, подразумѣваетъ то, что въ логариѳмической спирали существуютъ радіусы-векторы всѣхъ величинъ и безконечность оборотовъ. Дѣйствительно, если заставить ϑ уменьшаться отъ $+\infty$ до $-\infty$, то $r = e^{a\vartheta}$ уменьшается безпрерывно отъ значенія $+\infty$ вплоть до предѣльнаго значенія 0, вслѣдствіе чего кривая описываетъ безконечное

число микроскопическихъ оборотовъ вокругъ полюса. Послѣдній, поэтому-то, и *называется ассимптотной точкой*.

Самое замѣчательное свойство Архимедовой спирали заключается въ томъ, что, такъ какъ производная r' или $f'(\vartheta)$ обращается въ коэффиціентъ a, то *поднормаль постоянна* по первой формулѣ (6) Это свойство позволяетъ просто построить нормаль и, слѣдовательно, касательную къ спирали Архимеда.

153. — Характерное свойство касательной къ логариѳмической спирали.

Поищемъ, подъ какимъ угломъ V радіусы-векторы r, будучи продолжены, пересѣкаютъ логариѳмическую спираль, уравненіе которой есть $r = e^{a\vartheta}$ или, что приводитъ къ тому же, какой уголъ образуютъ эти радіусы съ соотвѣтственными касательными къ кривой? Если продифференцировать выраженіе r, т.-е. $e^{a\vartheta}$, то получимъ $r' = ae^{a\vartheta} = ar$; и по (5) котангенсъ угла V обращается въ a. Поэтому, *логариѳмическая спираль пересѣкаетъ всѣ радіусы-векторы подъ постояннымъ угломъ.*

Но это можно было и предвидѣть, если замѣтить, что части логариѳмической спирали, занимающія, если смотрѣть изъ центра, одно и то же угловое разстояніе, но будучи совершенно произвольными, — подобны и располагаются тоже подобно посредствомъ простого вращенія вокругъ полюса; а мы знаемъ, что подобные углы въ подобныхъ фигурахъ равны.

Обратно, свойство пересѣкать радіусы-векторы подъ постояннымъ угломъ не принадлежитъ никакой другой кривой, какъ только логариѳмической спирали. Дѣйствительно, если бы вдоль всей кривой $\operatorname{cotg} V = \text{const}\ a$, или, если бы, по (5), $\frac{r'}{r} = a$, т.-е. $\frac{d \lg r}{d\vartheta} = \frac{d.a\vartheta}{d\vartheta}$, то двѣ функціи $\lg r$ и $a\vartheta$, имѣющія постоянно одну и ту же производную, могли бы различаться только на постоянное b; почему и получается $\lg r = a\vartheta + b$.

Частное значеніе, самое замѣчательное, какое только можно дать a, есть нуль. Тогда $\operatorname{ctg} V = a$ уничтожается, и V = прямому углу; это-то и есть характерное свойство круговъ, описываемыхъ вокругъ полюса, какъ центра, такъ какъ соотношеніе $\operatorname{ctg} V = 0$ заставляетъ, по (5), положить $r' = 0$ или $r = \text{const}$. Такимъ образомъ, когда a безконечно мало, логариѳмическая спираль пересѣкаетъ подъ прямымъ угломъ всѣ радіусы-векторы, и ея обороты дѣлаются кругами. Ясно, что разстояніе $r = e^{a\vartheta}$ до полюса увеличивается тогда съ безконечной медленностью и спираль составляется изъ оборотовъ, стагивающихся другъ къ другу и равнозначущихъ группѣ концентрическихъ круговъ, описываемыхъ вокругъ полюса.

154. — Радіусъ кривизны и эволюта логариѳмической спирали.

Уравненіе $r = e^{a\vartheta}$, дифференцированное два раза, даетъ $r' = ae^{a\vartheta}$, $r'' = a^2e^{a\vartheta}$ и, слѣдовательно, $r'^2 = rr''$. Тогда знаменатель выраженія (8) радіуса R кривизны обращается въ $r^2 + r'^2$ и получается, если принять во вниманіе второе (6), $R = \sqrt{r^2 + r'^2} = N$ какъ по величинѣ, такъ и по знаку. Но это можно было бы видѣть еще болѣе непосредственно, если бы замѣтить, что постоянство V'а обращаетъ уголъ смежности $d(\vartheta + V)$ въ $d\vartheta$ и, слѣдовательно, радіусъ R кривизны въ отношеніе $\frac{ds}{d\vartheta}$, которое равняется N по послѣдней части (7). Поэтому, *въ логариѳмической спирали радіусъ круга-касательнаго равенъ нормали, и центръ кривизны совпадаетъ съ концомъ поднормали.*

Послѣ этого поищемъ уравненіе эволюты, т. е. мѣста центровъ кривизны C. Ихъ полярный уголъ xOC, который мы назовемъ черезъ ϑ', равенъ, какъ видно, $xOM + MOC$ или $\vartheta + \frac{\pi}{2}$; поэтому $\vartheta = \vartheta' - \frac{\pi}{2}$. Съ другой стороны ихъ радіусъ-векторъ OC, не что иное, какъ поднормаль, имѣетъ для своего выраженія, по первой формулѣ (6), производную $r' = ae^{a\vartheta} = e^{a\vartheta + \lg a}$ радіуса-вектора OM. Будемъ обозначать его черезъ r' и, выражая ϑ въ видѣ функціи отъ ϑ', какъ уже намъ случалось дѣлать, будемъ имѣть, между двумя координатами r' и ϑ' центровъ C кривизны, уравненіе эволюты:

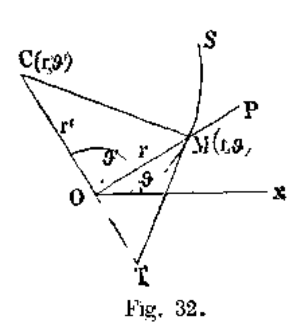


Fig. 32.

$$r' = e^{a\left(\vartheta' - \frac{\pi}{2}\right) + \lg a} = e^{a\left(\vartheta' - \frac{\pi}{2} + \frac{\lg a}{a}\right)}.$$

Въ этой кривой можно узнать логариѳмическую спираль, описанную вокругъ того же полюса, что и предыдущая, и, если считать полярные углы, начиная съ радіуса-вектора, при которомъ имѣютъ $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{\lg a}{a}$, дѣлающуюся такой, что и предыдущая $r = e^{a\vartheta}$ по отношенію къ оси Ox. Поэтому, *логариѳмическая спираль имѣетъ за эволюту такую же кривую, получающуюся, если заставить ее повернуться просто, вокругъ полюса, на уголъ* $\frac{\pi}{2} - \frac{\lg a}{a}$ *въ направленіи, по которому увеличиваются ея радіусы-векторы, и считаются положительными полярные углы.* Если бы постоянное a было такимъ, что это вращеніе обращается въ точное число n оборотовъ, то радіусъ-векторъ OC, равный $e^{a(\vartheta' - 2n\pi)}$, совпадалъ бы съ радіусомъ-векторомъ данной спирали, полярный уголъ

которой есть $\vartheta' - 2n\pi$, и кривая была бы по отношенію къ самой себѣ своей собственной эволютой.

Любопытно, что наиболѣе замѣчательныя двѣ линіи, разсмотрѣнныя въ этой главѣ, именно циклоида и логариѳмическая спираль, обладаютъ однимъ и тѣмъ же свойствомъ — имѣть за эволюты кривыя, которыя равны имъ.

Легко понять, что не только конецъ C поднормали, но и конецъ T подкасательной описываетъ спираль, подобную предыдущей; и мы видѣли раньше, что встрѣчаются опять съ той же самой кривой, когда хотятъ построить другія, которыя подобны ей. Общій характеръ логариѳмической спирали заключается поэтому въ сильномъ стремленіи снова появиться послѣ своихъ измѣненій, приводящемъ къ тѣмъ двумъ соотносительнымъ свойствамъ, которыми обладаютъ экспонентныя количества, именно свойствами возрождаться при дифференцированіи и перемножаться между собой отъ простого сложенія своихъ показателей (когда они имѣютъ одно и то же основаніе).

ГЛАВА XII.

Пространственныя кривыя: касательная и *особенныя точки, дуга, нормальная плоскость, плоскость-касательная, главная нормаль и бинормаль.

155. — *Уравненія пространственной кривой.*

Линія, которую можно всегда представлять, какъ путь движущейся точки и какъ пересѣченіе двухъ поверхностей, называется *пространственной кривой,* когда четыре послѣдовательныя изъ ея точекъ, взятыя какъ угодно близко другъ отъ друга, не содержатся въ одной и той же плоскости, такъ что четвертая выходитъ изъ плоскости, проходящей черезъ три первыя. Такую кривую, AB, какъ мы дѣлали при плоскостныхъ линіяхъ, взятыхъ произвольно въ пространствѣ, относятъ къ системѣ трехъ прямолинейныхъ осей Ox, Oy, Oz; и каждая изъ ея точекъ, какъ напр. M, опредѣляется своими тремя координатами $OP = x$, $Pm = y$, mM или $Pm' = z$.

Когда линія считается описываемой мобилемъ M, то эти три координаты x, y, z дѣлаются, какъ мы это уже видѣли (стр. 20), тремя функціями времени t, могущими быть произвольными, если кривая сама произвольна. Послѣдняя имѣетъ тогда слѣдовательно три уравненія формы $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, которыя выражаютъ въ одно и то же время частный способъ, по которому она описана. Точно такъ же, несмотря на ихъ симметрію по отношенію къ x, y, z, или на аналогію роли, которую играютъ три координаты, тогда какъ роль независимаго перемѣннаго предназначена времени t, вполнѣ опредѣляющему эту совершенно спеціальную роль, единственную по своей натурѣ, абсолютно отличной отъ натуры x'а, y'а, z'а, — эти уравненія довольно рѣдко бываютъ наиболѣе простыми, а въ примѣненіяхъ ихъ предпочитаютъ брать только координаты x, y, z точекъ кривой, чтобы откинуть то, что стало бы измѣняться со способомъ образованія. Поэтому, исключаютъ t, получая, напр., его значеніе въ видѣ функціи x'а изъ перваго уравненія $x = f_1(t)$ и подставляя его въ два другія. Тогда, чтобы представить кривую, мы

получаемъ два только уравненія формы $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, гдѣ двѣ функціи f и φ могутъ быть какими угодно, такъ какъ онѣ не отличались бы отъ двухъ, остающихся произвольными, f_2 и f_3, если бы заставить кривую образовываться такимъ образомъ, чтобы было постоянно $t = x$.

Эти два уравненія $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ вполнѣ опредѣляютъ всякую вѣтвь кривой, пересѣкаемую въ единственной точкѣ M всякой плоскостью mPm', параллельною къ yz; дѣйствительно, какъ только эта плоскость будетъ дана или узнается ея абсцисса x, сейчасъ же точка M

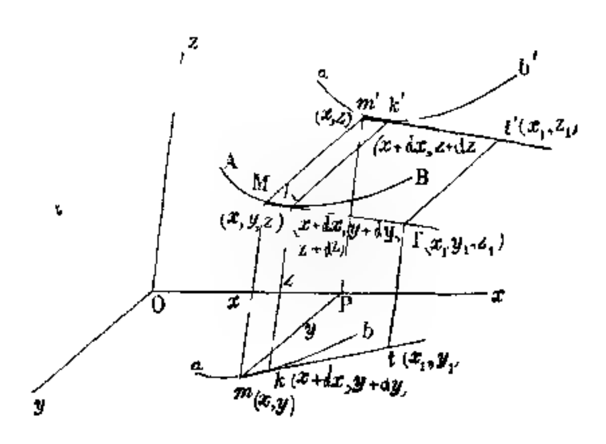


Fig. 33.

кривой будетъ найдена, если провести одну за другой найденныя координаты $Pm = y = f(x)$ и $mM = z = \varphi(x)$, слѣдуя соотвѣтственными направленіями Oy и Oz или ихъ противоположными (если y и z отрицательны). Наоборотъ, можно видѣть, что всякая вѣтвь кривой, строящаяся въ то же время, какъ и система осей, способна, по крайней мѣрѣ эмпирическимъ путемъ, дать эти два уравненія $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, такъ какъ тогда достаточно узнать OP или x для того, чтобы плоскость mPm', пересѣкающая кривую, опредѣлила M и, слѣдовательно, mM или z и Pm или y: y и z дѣлаются, слѣдовательно, двумя извѣстными функціями x'а. Когда нѣсколько вѣтвей кривой окружаютъ однѣ и тѣ же точки оси Ox, т.-е. имѣютъ однѣ и тѣ же абсциссы x, то функціи $f(x)$, $\varphi(x)$ содержатъ болѣе одной серіи различныхъ значеній, но на нихъ всегда можно смотрѣть, какъ на вполнѣ опредѣленныя, разсматривая лишь серію, относящуюся къ разсматриваемой въ данную минуту вѣтви.

Двѣ координаты точки M, x и y напр., будутъ такими же координатами ея *проекціи* m на плоскость этихъ координатъ или xy'овъ, проекціи, получающейся, если провести параллель Mm къ оси Oz третьей координаты; эту проекцію я буду называть *облической* всякій разъ, какъ

эта ось не будетъ нормалью къ двумъ прочимъ, для того, чтобы отличать ее отъ обыкновенной или *ортогональной* проекціи, которая будетъ основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ M на плоскость. Точно такъ же я буду называть *облической* проекціей точки M на одну изъ осей, на ось x'овъ напр., точку P, получающуюся, если провести черезъ M плоскость MmP, не нормальную къ Ox, но параллельную къ плоскости другихъ координатъ y, z. Эти названія будутъ распространяться кромѣ того и на аналогичныя проекціи какихъ-угодно фигуръ, которыя будутъ всегда *мѣстами* точекъ.

Уравненіе $y = f(x)$ есть, слѣдовательно, уравненіе облической проекціи ab кривой AB на плоскосс xy'овъ; точно такъ же другое уравненіе $z = \varphi(x)$ или $Pm' = \varphi(OP)$ есть уравненіе облической проекціи $a'b'$ кривой AB на плоскость xz'овъ. Вѣтвь пространственной кривой AB такимъ образомъ опредѣляется посредствомъ своихъ облическихъ проекцій ab, $a'b'$ на двѣ координатныя плоскости; и каждая, M, изъ ея точекъ получается посредствомъ построенія параллелограмма $mPm'M$, двѣ смежныя стороны Pm и Pm' котораго суть, въ двухъ соотвѣтственныхъ плоскостяхъ этихъ двухъ проекцій, ординаты y и z точекъ m и m', имѣющихъ абсциссой $x = OP$ искомой точки M кривой въ пространствѣ. Когда эта кривая — пространственная, то невозможно, чтобы она имѣла даже очень малую дугу (которая содержала бы постоянно безконечность послѣдовательныхъ точекъ) въ плоскости mPm' и, при абсциссѣ x на всякой вѣтви, какъ AB, существовали еще другія, кромѣ M, точки.

Чтобы линія сдѣлалась плоскостной и содержалась въ плоскости, параллельной yz, надо было бы, чтобы абсцисса x, приведенная къ постоянному значенію, сдѣлалась неспособной играть роль независимаго перемѣннаго; но тогда проекція (ортогональная или облическая) кривой на плоскость yz'овъ была бы, очевидно, параллельной и равной ей. Слѣдовательно на эту плоскость yz'овъ проектировали бы данную кривую и ограничивались бы при разсмотрѣніи ея только ея уравненіемъ между y и z. Что же касается до ея проекціи или на плоскость xy'овъ или на плоскость xz'овъ, то она обратилась бы въ прямую линію. По случаю послѣдняго-то обстоятельства плоскотная кривая и называется кривой *съ простой кривизной*. Отсюда вытекаетъ, что, такъ какъ при разсматриваніи кривой необходимо разсматривать вообще двѣ плоскостныхъ проекціи, то одной лишь, надлежащимъ образомъ выбранной, достаточно, чтобы узнать плоскостную кривую, такъ какъ другая, которую можно было бы связать съ первой, есть прямая линія. Иначе говоря, такая линія *является въ видѣ* кривой на одной изъ двухъ плоскостей проекціи, о которой идетъ дѣло, и *безъ кривизны* на другой. Напротивъ пространственныя линіи называютъ *кривыми съ двойной кривизной*, чтобы выразить, что онѣ всегда видимы подъ формой двухъ кривыхъ, которыя суть ихъ проекціи на двухъ какихъ-либо плоскостяхъ.

Два уравненія $y = f(x)$ и $z = \varphi(x)$ могутъ быть разсматриваемы еще, какъ уравненія двухъ *цилиндровъ* или скорѣе, двухъ *цилиндрическихъ поверхностей*, $abBA$ и $a'b'BA$, образующія которыхъ, такія, какъ mM и $m'P$, соотвѣтственно параллельныя къ Oz и Oy, упираются въ двѣ проекціи ab, $a'b'$ данной кривой AB; послѣдняя же, мѣсто точекъ, которыя принадлежатъ обѣимъ имъ или которыя удовлетворяютъ вмѣстѣ этимъ уравненіямъ, есть пересѣченіе двухъ цилиндровъ. Но часто представляется удобнымъ замѣнять подобные цилиндры группой двухъ другихъ поверхностей, пересѣченія которыхъ содержатъ эту кривую и уравненія которыхъ будутъ формы $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$ съ двумя первыми частями F и Φ, которыя суть безпрерывныя функціи, имѣющія *первыя производныя безпрерывными при всевозможныхъ* конечныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ x, y, z. Тогда пересѣченіе, представляемое системой нерѣшенныхъ уравненій $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$, будетъ вообще кривой безъ начала и конца, безъ раздвоенія и колѣнъ, въ которую соединяются, слѣдовательно, *всѣ* вѣтви, соединеніе которыхъ можетъ образовать *естественное цѣлое;* эту кривую представляютъ отдѣльно явныя уравненія $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, когда $f(x)$ и $\varphi(x)$ состоятъ, напр., изъ радикаловъ съ кратными знаками.

156. — Касательныя къ пространственнымъ кривымъ.

Идея существованія опредѣленнаго направленія, и, слѣдовательно, касательной въ каждой точкѣ (x, y, z) пространственной кривой непосредственно заключается въ нашемъ представленіи о всякой кривой линіи. Между тѣмъ слѣдуетъ замѣтить, что было бы достаточно имѣть эту идею относительно плоскостныхъ кривыхъ для того, чтобы распространить ее и на пространственныя кривыя. Дѣйствительно, если разсматривать въ двухъ плоскостныхъ проекціяхъ ab и $a'b'$ (fig. 38) пространственной кривой AB двѣ безконечно-малыя хорды mk и $m'k'$, продолженныя до t и t', проекціи безконечно-малой хорды MK, продолженной также до T, кривой AB, то будетъ достаточно, чтобы эти двѣ касательныя или предѣльныя положенія mt, $m't'$ сѣкущихъ къ плоскостнымъ кривымъ были вполнѣ опредѣлены, т.-е. чтобы направленіе все болѣе и болѣе меньшихъ хордъ имѣло въ m и m' опредѣленный предѣлъ, для того, чтобы положеніе MT не менѣе было неподвижно, въ виду невозможности варіированія ея безъ одновременнаго варіированія по крайней мѣрѣ одной изъ своихъ двухъ облическихъ проекцій ab, $a'b'$.

Итакъ касательная MT къ пространственной кривой существуетъ и имѣетъ за облическія проекціи касательныя mt, $m't'$, проведенныя къ аналогичнымъ проекціямъ этой кривой. Если x_1, y_1, z_1 — координаты какой-либо T изъ ея точекъ (или *подвижныя координаты*), то x_1 и y_1, x_1 и z_1 будутъ соотвѣтственными координатами t'а и t''а и касатель-

ная MT будетъ имѣть за свои уравненія — уравненія своихъ двухъ проекцій mt, $m't'$, именно, если назвать черезъ y', z' двѣ производныя функцій $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$,

$$(1) \qquad y_1 - y = y'(x_1 - x), \qquad z_1 - z = z'(x_1 - x).$$

Но если кривая AB разсматривалась, какъ траекторія мобиля M, или если x, y, z дѣлались тремя данными функціями $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$ вспомогательнаго перемѣннаго t, то можно прямо замѣтить, что вдоль прямой MT три разности, x_1-x, y_1-y, z_1-z, облическія проекціи MT'а на три оси, сохраняютъ между собой одни и тѣ же отношенія, когда точка T перемѣщается, и что онѣ слѣдовательно пропорціональны своимъ значеніямъ $dx=x'dt$, $dy=y'dt$, $dz=z'dt$, отнесеннымъ къ моменту, когда точка T находится во второмъ концѣ K безконечно-малой хорды MK. Поэтому мы получимъ, какъ уравненіе касательной,

$$(2) \qquad \frac{x_1-x}{x'} = \frac{y_1-y}{y'} = \frac{z_1-z}{z'},$$

отношенія, которыя вполнѣ обращаются въ (1) по условію $t=x$, т.-е. когда мы имѣемъ $x'=1$ и когда y, z дѣлаются функціями x'а.

Наконецъ, если данная линія AB опредѣлена, какъ пересѣченіе двухъ поверхностей $F(x,y,z)=0$ и $\Phi(x,y,z)=0$, то ихъ касательныя въ (x,y,z) плоскости, соотвѣтственныя мѣста касательныхъ, проведенныхъ въ этой точкѣ къ кривымъ, перекрещивающимся на каждой поверхности, — должны будутъ всегда попарно, такъ какъ AB будетъ принадлежать заразъ двумъ поверхностямъ, содержать касательную MT, которая будетъ, слѣдовательно ихъ пересѣченіемъ. По уравненію касательныхъ плоскостей, доказанному въ началѣ этого курса*), два уравненія касательной будутъ:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_1-x) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(y_1-y) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(z_1-z) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x_1-x) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(y_1-y) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}(z_1-z) = 0. \end{cases}$$

Но ихъ можно было бы вывести напр. изъ (1), если бы замѣтить, что двѣ производныя, y', z', неявныхъ функцій y, z отъ x, опре-

---

) Это уравненіе въ употребляемой здѣсь формѣ было доказано только во второй части (№ 42), но чтобы вывести эту форму изъ наиболѣе простой (17), данной въ № 41, достаточно подставить вмѣсто частныхъ производныхъ p и q ординаты z ихъ полученныя значенія, какъ мы видѣли это въ № 66, дифференцируя по отношенію къ x и къ y уравненіе $F=0$ или $\Phi=0$ поверхности.

дѣляющихся соотношеніями $F=0$, $\Phi=0$, вытекаютъ изъ двухъ *производныхъ* соотношеній:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial z}z'=0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}y'+\frac{\partial \Phi}{\partial z}z'=0;$$

если умножить послѣднія на x_1-x, то произведенія $y'(x_1-x)$ и $z'(x_1-x)$ будутъ исключены отсюда посредствомъ (1), а это дастъ уравненія (3).

Въ концѣ концовъ замѣтимъ, что, если начиная съ точки M (fig. 34) взять очень малую дугу кривой, ML; облическія проекціи которой будутъ ml, $m'l'$, и если измѣрить въ плоскости lQl', параллельной yz-амъ соотвѣтственные отрѣзки LT, lt, $l't'$ между ихъ вторыми концами и касательными MT, mt, $m't'$, проведенными къ первымъ M, m, m', то эти отрѣзки будутъ такого же порядка въ пространственной кривой, какъ въ плоскостныхъ кривыхъ ихъ проекціи, т.-е. вообще, второго порядка, или сравниваемы съ квадратами или дугъ ML, ml, $m'l'$, или ихъ облической проекціи PQ на ось абсциссъ x, разстояній вообще порядка нормальнаго разстоянія между двумя параллельными плоскостями mPm', lQl'. На самомъ дѣлѣ отрѣзокъ LT въ пространственной кривой есть діагональ параллелограмма $CTC'L$, построеннаго на двухъ сторонахъ TC, TC', равныхъ и параллельныхъ отрѣзкамъ tl, $t'l'$, идущимъ по Oy и Oz и принадлежащимъ двумъ кривымъ ab, $a'b'$. Но такъ какъ уголъ CTC' или yOz не безконечно сосѣденъ ни съ нулемъ, ни съ двумя прямыми, то ясно, что діагональ LT есть порядка наибольшаго изъ отрѣзковъ lt, $l't'$.

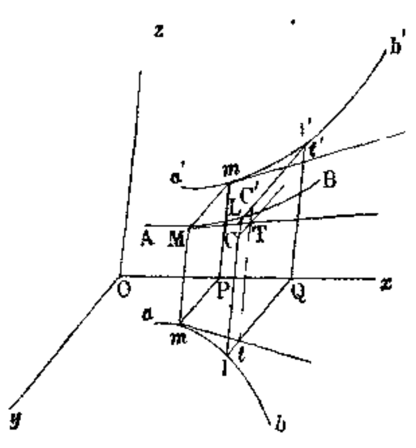


Fig. 34.

То же самое доказательство, очевидно, могло бы быть приложимо, если бы касательная MT была замѣнена какой-либо линіей, выходящей изъ M, а mt, $m't'$ — соотвѣтственными проекціями этой линіи на двѣ плоскости xy'овъ и xz'овъ. Оно показывало бы, что отрѣзокъ этой линіи съ данной ML, измѣряемой въ плоскости lQl', былъ бы сравниваемъ съ наибольшимъ изъ двухъ аналогичныхъ отрѣзковъ его двухъ проекцій съ проекціями ml, $m'l'$ кривой ML. Иначе говоря, *порядокъ контакта двухъ кривыхъ въ пространствѣ есть порядокъ ихъ соотвѣтственныхъ проекцій на двѣ координатныя плоскости, когда отрѣзки въ этихъ двухъ плоскостяхъ взаимно сравниваемы.*

158. Безконечно-малый параллелепипедъ и косинусы-директоры касательной; дуга, какъ независимое перемѣнное.

Вычисленіе дифференціала дуги s кривой привело насъ, въ началѣ этого курса (стр. 40), къ построенію, которое вполнѣ доказываетъ отношенія, существующія между направленіемъ касательной или элемента ds кривой, выходящаго изъ точки (x, y, z) контакта, и направленіями осей. Это построеніе заключается въ параллелепипедѣ, который, начиная съ вершины $M(x, y, z)$, имѣетъ за діагональ тотъ же самый элементъ $ds = MM'$, способный въ предѣлѣ совпасть съ своей хордой, и за ребра — свои три (облическія) проекціи, $dx = \pm MP$, $dy = \pm MQ$, $dz = \pm MR$, на три параллели къ осямъ, проекціи, которыя берутъ положительно или отрицательно, смотря по тому, будутъ ли онѣ, начиная съ M, направляться въ смыслѣ положительныхъ x'овъ, y'овъ, z'овъ или въ смыслѣ отрицательныхъ x, y, z. Такой параллелепипедъ, который можно было бы, для простоты, обратить въ тетраедръ, имѣющій за ребра, выходящія изъ точки (x, y, z), элементъ $ds = MM'$ съ его двумя (облическими) проекціями на прямую MP, параллельную къ x'амъ, и на плоскость PMQ, параллельную xy'амъ, — очевидно, будетъ исполнять при пространственныхъ кривыхъ ту же роль, что безконечно-малый треугольникъ Баррова (стр. 186) при плоскостныхъ кривыхъ.

Ограничимся частнымъ случаемъ прямоугольныхъ осей для того, чтобы dx, dy, dz были ортогональными проекціями ds'а; и назовемъ черезъ α, β, γ три угла, которые образуетъ съ положительными осями x'овъ, y, z, представляющимися своими параллелями, выходящими изъ M, касательная, продолженіе хорды $ds = MM'$. Такъ какъ эти углы именно тѣ, подъ какими ds имѣетъ за свои проекціи по величинѣ и знаку dx, dy, dz, то послѣднія соотвѣтственно равняются $ds \cos\alpha$, $ds \cos\beta$, $ds \cos\gamma$; и три *косинуса-директора* касательной, слѣдовательно, выражаются формулами

$$(6)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \dfrac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \dfrac{dz}{ds}, \\ \text{гдѣ} \\ \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \end{cases}$$

Касательная такимъ образомъ проведена въ томъ же самомъ направленіи, по которому кривая описана движущейся точкой, т.-е. отъ M, гдѣ координаты x, y, z, къ M', гдѣ онѣ $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ и гдѣ (какое-либо) независимое перемѣнное t увеличилось на положительное количество dt въ то же время, какъ уже *пройденная* дуга s, которая берется здѣсь по абсолютной величинѣ, увеличилась на такое же поло-

жительное количество ds. Слѣдовательно, если въ формулы (6) подставить вмѣсто dx, dy, dz, ds произведенія на dt соотвѣтственныхъ производныхъ x', y', z', s', то радикалъ $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$, значеніе s''а, долженъ будетъ быть взятъ по абсолютной величинѣ, тогда мы будемъ имѣть въ нѣсколько сжатой, уже знакомой намъ, формѣ

$$(7) \qquad \cos(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{(x', y', z')}{s'}, \quad \text{гдѣ} \quad s' = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

Эти формулы еще болѣе упростятся, если взять $t = s$, какъ это уже было указано въ № 15 (стр. 41), т.-е. если выбрать дугу s за независимое перемѣнное. Тогда $s' = 1$ и получается

$$(8) \quad \cos\alpha = x', \quad \cos\beta = y', \quad \cos\gamma = z', \quad \text{съ } x'^2+y'^2+z'^2 = 1,$$

что уже выражалось при лейбницевскомъ обозначеніи разсмотрѣнными формулами (6). Поэтому, *когда берутъ при прямоугольныхъ осяхъ дугу за независимое перемѣнное, то первыя производныя трехъ координатъ выражаютъ косинусы директоры касательной; а извѣстное условіе, въ виду котораго квадраты трехъ косинусовъ-директоровъ имѣютъ въ суммѣ единицу, дѣлается простымъ соотношеніемъ между этими тремя производными.*

Мы увидимъ вскорѣ, что эти упрощенія не единственны и насколько взятіе дуги за перемѣнное упрощаетъ вообще выраженіе свойствъ пространственныхъ кривыхъ. Главное заключается въ томъ, что сумма $x'^2+y'^2+z'^2$ приводится тогда постоянно къ единицѣ. Изъ этого слѣдуетъ напр. то, что производная отъ $x'^2+y'^2+z'^2$ вдоль дуги, именно удвоенный триномъ $x'x''+y'y''+z'z''$, тождественно уничтожается; поэтому можно, прилагая къ послѣднему соотношенію (8) это свойство, которымъ оно обладаетъ, написать двѣ формулы, часто употребляемыя, въ видѣ

$$(9) \qquad x'^2+y'^2+z'^2 = 1, \qquad x'x''+y'y''+z'z'' = 0.$$

159. — Нормальная плоскость.

Если черезъ точку $M(x, y, z)$ [fig. 35] пространственной кривой AB, которую вообще представляютъ три уравненія формы $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, провести во всѣхъ возможныхъ направленіяхъ *нормали*, какъ MN, къ этой кривой, — то мы поймемъ, что эти перпендикуляры къ касательной MT имѣютъ за геометрическое мѣсто плоскость PQ, перпендикулярную къ MT. Эта плоскость называется *нормальной* къ кривой въ M. Образуемъ ея уравненіе сначала при условіи облическихъ осей. Какая-либо, N, изъ ея точекъ, координаты (*подвижныя координаты* плоскости) которой я назову черезъ x_1, y_1, z_1, будетъ характе-

ризоваться тѣмъ, что она будетъ проектироваться въ M на касательную MT или что прямая MN, соединяющая ее съ M и имѣющая свои три облическія проекціи на оси въ видѣ $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$, будетъ имѣть свою собственную (нормальную) проекцію на MT равною нулю. Но извѣстно, что эта проекція прямой MN на другую прямую MT, косинусы-директоры которой я назову черезъ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, есть сумма проекцій $(x_1 - x)\cos\alpha$, $(y_1 - y)\cos\beta$, $(z_1 - z)\cos\gamma$, на эту прямую, трехъ сторонъ ломаной линіи, идущей отъ M къ N, сторонъ, соотвѣтственно параллельныхъ осямъ x'овъ, y, z и равныхъ $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$. Слѣдовательно уравненіемъ нормальной плоскости будетъ

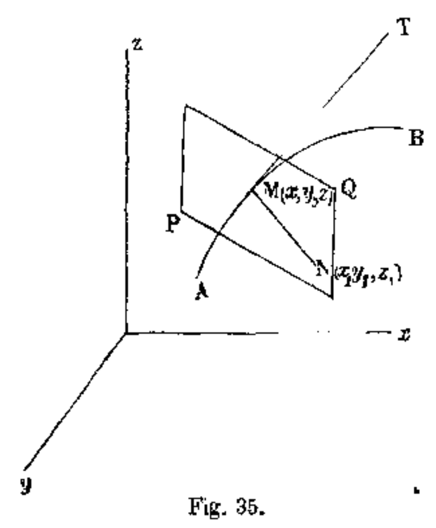


Fig. 35.

$$(x_1 - x)\cos\alpha + (y_1 - y)\cos\beta + (z_1 - z)\cos\gamma = 0.$$

Если же оси прямоугольны, то оно сдѣлается, если замѣнить, по (7), $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ тремя соотвѣтственными производными x', y', z',

(10) $$x'(x_1 - x) + y'(y_1 - y) + z'(z_1 - z) = 0.$$

160. — Плоскость-касательная; ея главныя свойства.

Взявъ какую-либо систему прямоугольныхъ или облическихъ осей Ox, Oy, Oz, замѣтимъ, что плоскость проходитъ черезъ три очень сосѣднія, но произвольныя точки кривой, соотвѣтствующія тремъ мало разнящимся между собой значеніямъ t, $t + \Delta t$, $t + \Delta' t$ независимаго перемѣннаго, точки, имѣющія координатами соотвѣтственно x, y, z; $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$; $x + \Delta' x$, $y + \Delta' y$, $z + \Delta' z$. Легко видѣть, что эта плоскость, каковы бы ни были взаимныя отношенія разстояній между тремя точками, будетъ стремиться къ предѣльному вполнѣ опредѣленному положенію, если заставить всѣ три точки стремиться къ одной только, уничтожая безконечно-малыя Δt и $\Delta' t$, а слѣдовательно, и Δx, Δy, Δz, $\Delta' x$, $\Delta' y$, $\Delta' z$.

На самомъ дѣлѣ пусть x_1, y_1, z_1 будутъ подвижными координатами плоскости какого-либо направленія, проведенной черезъ (x, y, z), и

(11) $$A(x_1 - x) + B(y_1 - y) + C(z_1 - z) = 0$$

ея уравненіе, въ которомъ три коэффиціента A, B, C (взятые по абсолютной величинѣ сравнимыми съ единицей) опредѣляли бы направленіе плоскости своими взаимными отношеніями, которыя одни и разсма-

триваютъ. Выразить, что эта плоскость есть именно та, которую хотятъ провести, или которая проходитъ черезъ точки $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ и $(x+\Delta' x,\ y+\Delta' y,\ z+\Delta' z)$, очевидно, значитъ написать, что это уравненіе удовлетворяется, когда x_1-x, y_1-y, z_1-z дѣлаются или Δx, Δy, Δz, или $\Delta' x$, $\Delta' y$, $\Delta' z$. Такъ какъ два уравненія опредѣляютъ взаимныя отношенія между A, B, C, то, слѣдовательно,

$$A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z=0, \qquad A\Delta' x+B\Delta' y+C\Delta' z=0.$$

Ихъ можно раздѣлить соотвѣтственно на Δt и $\Delta' t$ и подставить затѣмъ вмѣсто второго его разность съ первымъ; а это дастъ

$$(12)\qquad \begin{cases} A\dfrac{\Delta x}{\Delta t}+B\dfrac{\Delta y}{\Delta t}+C\dfrac{\Delta z}{\Delta t}=0, \\[2ex] A\left(\dfrac{\Delta' x}{\Delta' t}-\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)+B\left(\dfrac{\Delta' y}{\Delta' t}-\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)+C\left(\dfrac{\Delta' z}{\Delta' t}-\dfrac{\Delta z}{\Delta t}\right)=0. \end{cases}$$

Но предполагая безпрерывными на разсматриваемомъ протяженіи первыя и вторыя производныя функцій x, y, z отъ t, разложимъ по формулѣ Тэйлора малыя увеличенія Δx, Δy, Δz и $\Delta' x$, $\Delta' y$, $\Delta' z$ этихъ функцій при двухъ соотвѣтственныхъ увеличеніяхъ Δt, $\Delta' t$ перемѣннаго. Если мы назовемъ черезъ x', y', z', x'', y'', z'' производныя двухъ первыхъ порядковъ отъ x, y, z, взятыя при точкѣ (x, y, z) кривой или при значеніи t перемѣннаго, съ котораго считаются эти увеличенія, то мы будемъ имѣть въ сжатой формѣ, представляя просто нѣсколькими точками дополнительные члены, отношеніе которыхъ къ $(\Delta t)^2$ или къ $(\Delta' t)^2$ будетъ нулемъ въ предѣлѣ,

$$(13)\qquad \begin{cases} (\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z)=(x',\ y',\ z')\,\Delta t+(x'',\ y'',\ z'')\,\dfrac{(\Delta t)^2}{2}+\dots \\[2ex] (\Delta' x,\ \Delta' y,\ \Delta' z)=(x',\ y',\ z')\,\Delta' t+(x'',\ y'',\ z'')\,\dfrac{(\Delta' t)^2}{2}+\dots \end{cases}$$

Наконецъ, эти значенія, введенныя въ оба уравненія (12), приведутъ ихъ, послѣ дѣленія второго на $\frac{1}{2}(\Delta' t-\Delta t)$ и конечнаго сокращенія, въ каждомъ, членовъ, совокупность которыхъ уничтожается съ Δt и $\Delta' t$, къ уравненіямъ, вообще отличающимся другъ отъ друга,

$$(14)\qquad Ax'+By'+Cz'=0, \qquad Ax''+By''+Cz''=0.$$

Итакъ, искомая плоскость приближается вполнѣ къ опредѣляемому предѣлу, каково бы ни было само по себѣ отношеніе, постоянное или перемѣнное, двухъ уничтожающихся увеличеній Δt и $\Delta' t$. Ничто не мѣ-

шаетъ напр. заставить стремиться къ нулю одно, Δt, изъ этихъ двухъ увеличеній скорѣе другого $\Delta' t$. Тогда двѣ точки (x, y, z) и $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ совпадаютъ въ одной, и хорда, которая соединяетъ ихъ, дѣлается касательной, тогда какъ третья точка $(x+\Delta' x, y+\Delta' y, z+\Delta' z)$ остается еще различной. Такимъ образомъ, *предѣльное положеніе плоскости есть то положеніе, которое проходитъ или черезъ три сосѣднія точки кривой, которыя стремятся совпасть, или черезъ двѣ такихъ точки и касательную къ кривой въ одной изъ нихъ.*

Но отсюда слѣдуетъ, что *въ сосѣдствѣ общей точки кривая удаляется отъ этой предѣльной плоскости менѣе, чѣмъ отъ всякой другой.* Дѣйствительно, пусть будутъ: M — общая точка, M' — сосѣдняя точка кривой, MT — касательная въ M, $M'T$ — разстояніе отъ M' до этой касательной, произведеніе хорды MM' на синусъ уничтожающагося угла TMM'. Чтобы плоскость была такой, чтобы кривая удалялась отъ нея какъ можно менѣе въ сосѣдствѣ съ M, надо сначала, чтобы она проходила черезъ эту точку M. Точно такъ же надо, чтобы она заключала въ себѣ касательную MT: безъ этого она образовала бы съ ней конечный уголъ и, слѣдовательно, замѣтно такой же уголъ съ хордой MM', вслѣдствіе чего разстояніе отъ M' до плоскости, произведеніе хорды MM' на синусъ этого конечнаго угла, было бы несравненно бо́льшимъ, чѣмъ $M'T$, тогда какъ оно замѣтно меньше при плоскостяхъ, проходящихъ по направленію MT. Пусть, PQ будетъ одна изъ этихъ плоскостей (содержащихъ MT), $M'\mu$ ея разстояніе до M' и, слѣдовательно, $MT\mu$ — уголъ, который она образуетъ съ плоскостью MTM', проходящей по MT и точкѣ M'. Треугольникъ $M'T\mu$, прямоугольный въ μ, дастъ $M'\mu = M'T \sin M'T\mu$. Поэтому, если бы плоскость PQ не была предѣломъ, къ которому стремится плоскость MTM', когда MM' уничтожается, то уголъ $M'T\mu$, не уничтожающійся при $MM'=0$, имѣлъ бы чувствительное значеніе; и разстояніе $M'\mu$ отъ точки M' до плоскости было бы порядка ея разстоянія $M'T$ съ касательной, тогда какъ оно сдѣлалось бы несравненно меньшимъ, если бы $\sin M'T\mu$ стремился къ нулю. Слѣдовательно, плоскость, отъ которой кривая удаляется наименѣе въ окрестностяхъ точки M, есть, какъ мы и хотѣли это доказать, предѣльное положеніе той, которая проходитъ черезъ касательную MT и точку M', стремящуюся къ M.

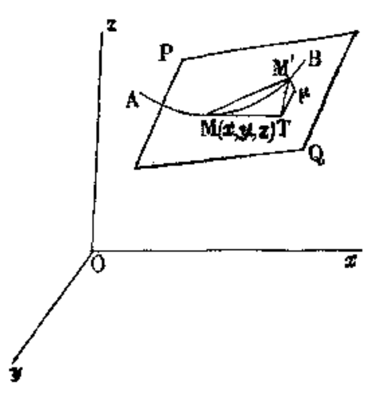


Fig. 36.

Поэтому-то ею и называютъ *плоскостью-касательной* къ кривой въ точкѣ M. Она (насколько это возможно) для пространственной линіи

около точки контакта M есть то, чѣмъ есть собственная плоскость плоскостной кривой для этой кривой, именно плоскасть, въ которой вращается касательная въ окрастностяхъ M. На самомъ дѣлѣ, проведемъ касательную къ точкѣ M', которую мы предположимъ сначала совпадающею съ M, а затѣмъ очень мало удаленною отъ нея, и назовемъ черезъ $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ координаты M'. По формуламъ (2) [стр. 236] направленіе касательной будетъ опредѣлено первыми производными этихъ координатъ, производными, равными своимъ значеніямъ x', y', z', отнесеннымъ къ M' и увеличенныхъ на малыя разности $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$, отношенія которыхъ къ одновременному увеличенію Δt перемѣннаго между M и M' суть почти вторыя производныя x'', y'', z'' для точки M. Но посмотримъ, болѣе легкимъ способомъ, какъ вращается эта касательная, если провести черезъ неподвижную точку M параллель къ ней, вращеніе которой будетъ считаться ея собственнымъ. Если x_1, y_1, z_1 означаютъ подвижныя координаты такимъ образомъ праведенной параллели, то ея направленіе будетъ опредѣляться, какъ извѣстно, тремя разностями x_1-x, y_1-y, z_1-z и тремя производными $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$ или, замѣтно, $x'+x''\Delta t$, $y'+y''\Delta t$, $z'+z''\Delta t$, которыя и надо вычислить. А ея уразненія напишутся:

$$\frac{x_1-x}{x'+x''\Delta t}=\frac{y_1-y}{y'+y''\Delta t}=\frac{z_1-z}{z'+z''\Delta t}. \tag{15}$$

Но съ этими, очевъ приближенными ураененіями, кэторыя вычисляютъ (съ почти уничтожающимися относительными ошибками) измѣненія направленія касательной возлѣ M, искомая параллель располагается и вращается въ плоскости-касательной. Дѣйствительно координаты x_1, y_1, z_1 какой-либо изъ ея точекъ, имѣющія свои превышенія надъ x, y, z пропорціональными тремъ знаменателямъ (15)-го, измѣняютъ уракненіе (11) плоскости въ

$$A(x'+x''\Delta t)+B(y'+y''\Delta t)+C(z'+z''\Delta t)=0,$$

удовлетворяющееся тождественно по условіямъ (14), опредѣляющимъ взаимныя отношенія между A, B и C.

Можно видѣть черезъ это доказательство, что плоскость-касательная содержитъ не только касательную къ кривой въ своей точкѣ контакта съ ней, но и параллель къ касательной, отличающуюся безконечно мало по направленію отъ послѣдней, т.-е. проведенную къ кривой въ безконечно-сосѣдней точкѣ; поэтому можно сказать: *плоскость-касательная есть еще предѣлъ плоскостей, проведенныхъ по касательной и параллельно къ другой касательной, когда послѣдняя неопредѣленно приближена къ первой.*

Наконецъ, разстояніе $M'\mu$ (fig. 36) отъ кривей до ея плоскости-касательной въ M, будучи безконечно меньшимъ, чѣмъ отрѣзокъ $M'T$

отъ той же самой точки M' до касательной MT, достигаетъ порядка малости, высшаго, чѣмъ второй порядокъ, и, слѣдовательно, вообще третьяго, по отношенію къ разстоянію $M'M$, на которомъ онъ лежитъ отъ точки контакта; правда, мы видѣли (стр. 237), что отрѣзокъ $M'T$ съ касательной — второго порядка, когда двѣ проекціи кривой на двѣ плоскости xy'овъ и xz'овъ имѣютъ свою кривизну конечною. Поэтому *контактъ пространственной кривой съ ея плоскостью-касательной вообще второго порядка.*

Можно было бы прямо вывести это изъ способа, какимъ получается плоскость-касательная, именно разсматривая ее, какъ предѣлъ положеній движущейся плоскости, проходящей черезъ три сосѣднія точки кривой. Дѣйствительно (ортогональная) проекція пространственной кривой на движущуюся плоскость проходитъ черезъ эти три точки; отсюда слѣдуетъ, что собственныя (облическія) проекціи, на плоскости xy и xz, этой проекціи пересѣкаютъ аналогичныя проекціи пространственной кривой въ мѣстахъ, гдѣ проектированы эти самыя три точки. Но въ предѣлѣ, такимъ образомъ, происходящія тройныя пересѣченія въ плоскостяхъ xy и xz образуютъ, какъ извѣстно, контактъ второго порядка; и (ортогональная) проекція пространствемной кривой на ея плоскость-касательную имѣетъ, слѣдовательно, въ видѣ проекціи на плоскости xy и xz, контактъ второго порядка съ этой пространственной кривой. По правилу, почти очевидному и доказанному въ концѣ № 156 (стр. 237), эта проекція будетъ имѣть съ ней контактъ того же порядка и въ пространствѣ; а это позволяетъ сказать, что разстоянія пространственной кривой до плоскости, возлѣ M, будутъ порядка малости высшаго, чѣмъ второй, и, вообще, третьяго.

161. — Уравненіе этой плоскости.

Чтобы образовать уравненіе плоскости-касательной, достаточно изъ соотношеній (14), которыя, раздѣленныя на C, суть два уравненія первой степени по $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$, вывести взаимныя отношенія между A, B и C и затѣмъ подставить эти отношенія на мѣсто A, B, C въ (11). Произведя это, мы найдемъ сначала:

$$\frac{A}{C}=\frac{y'z''-z'y''}{x'y''-y'x''},\quad \frac{B}{C}=\frac{z'x''-x'z''}{x'y''-y'x''},$$

что заставитъ взять двойную пропорцію

$$\text{(16)}\qquad \frac{A}{y'z''-z'y''}=\frac{B}{z'x''-x'z''}=\frac{C}{x'y''-y'x''};$$

а подстановка на мѣсто A, B, C въ (11) пропорціональныхъ биномовъ,

фигурирующихъ въ знаменателяхъ, даетъ наконецъ искомое уравненіе

$$(17)\quad (y'z''-z'y'')(x_1-x)+(z'x''-x'z'')(y_1-y)+(x'y''-y'x'')(z_1-z)=0.$$

Легко понять способъ симметріи этихъ формулъ (16) и (17) посредствомъ того, что называютъ *круговыми перестановками* или *вращающимися перестановками*, производимыми надъ аналогичными буквами. Раздѣлимъ кругъ на извѣстное число равныхъ частей, т.-е. въ данномъ случаѣ — на три; затѣмъ напишемъ возлѣ послѣдовательныхъ точекъ дѣленія три буквы A, B, C (которыя означаютъ аналогичныя количества) въ избранномъ порядкѣ и *аналогичныя* буквы x', y', z' и x'', y'', z''. Затѣмъ произведемъ круговую или вращающуюся перестановку надъ извѣстными буквами, когда будемъ замѣнять въ формулѣ каждую изъ такимъ образомъ написанныхъ букъ аналогичной буквой, которая встрѣтится на кругѣ, если сдѣлать оборотъ этого послѣдняго въ направленіи стрѣлки. Напр. круговая перестановка, произведенная надъ A, даетъ B; надъ B оно дало бы C, а надъ C оно дало бы A, etc...

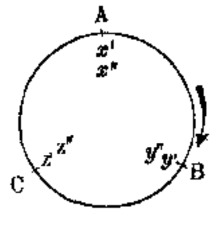


Fig 37.

Узнавъ это, произведемъ круговую перестановку надъ первымъ изъ отношеній (16) и мы получимъ второе; точно также круговая перестановка, произведенная надъ вторымъ, дастъ третье, etc. Поэтому, достаточно вспомнить одно изъ отношеній (16), чтобы вывести два другихъ посредствомъ одной или двухъ вращающихся перестановокъ, произведенныхъ надъ его выраженіемъ. Каждый членъ первой части (17)-аго получается точно также изъ предыдущаго посредствомъ вращающейся перестановки, произведенной надъ всѣми ея буквами.

162. — Главная нормаль и бинормаль.

Главною нормалью къ кривой въ извѣстной точкѣ называется пересѣченіе нормальной плоскости и плоскости-касательной, проведенныхъ въ эту самую точку; въ другихъ словахъ, это та изъ нормалей, которая лежитъ въ плоскости-касательной и которая, слѣдовательно, сдѣлалась бы обыкновенной нормалью, если бы кривая была плоскостной.

Уравненіями главной нормали будутъ, слѣдовательно, тѣ же уравненія, (10) и (11), двухъ плоскостей, нормальной и касательной. Первое (10) предполагаетъ прямоугольность осей; вслѣдствіе этого мы должны остановиться на этомъ условіи. А чтобы прійти къ весьма простой формѣ такимъ образомъ данной (10)-ымъ и (11)-ымъ системы, предположимъ дугу s кривой за независимое перемѣнное. Тогда уравненія (10) и (11), которыя вполнѣ опредѣляютъ взаимныя отношенія разностей, x_1-x, y_1-y, z_1-z, будутъ удовлетворяться посредствомъ под-

становки на мѣсто этихъ разностей трехъ производныхъ x'', y'', z'', которыя обратятъ ихъ соотвѣтственно во второе (9) и во второе (14). Поэтому соотношенія (10) и (11) даютъ съ выбраннымъ перемѣннымъ s двойную пропорцію

$$(18) \qquad \frac{x_1 - x}{x''} = \frac{y_1 - y}{y''} = \frac{z_1 - z}{z''}.$$

Таковы два упрощенныя, сколь возможно, уравненія главной нормали.

Перпендикуляръ, проходящій къ плоскости-касательной черезъ точку (x, y, z) контакта и находящійся подъ прямымъ угломъ съ направленіями *двухъ* послѣдовательныхъ элементовъ кривой, которымъ содержитъ эта плоскость, есть, какъ бы *вторая* нормаль: поэтому она и получаетъ имя *бинормали*. Каковы бы ни были оси, прямоугольныя или нѣтъ, ея косинусы-директоры, по уравненію (11) плоскости-касательной, пропорціональны коэффиціентамъ A, B, C разностей $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$; дѣйствительно, если взять прямую, косинусы-директоры которой, на самомъ дѣлѣ, представлялись бы пропорціонально A, B, C, что всегда возможно, и если назвать, для краткости, прямую или направленіе черезъ (A, B, C), то три (облическія) проекціи $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ на оси прямой, которая соединяетъ точку (x, y, z) со всякой другой точкой (x_1, y_1, z_1) плоскости-касательной, соотвѣтотвенно умноженныя на A, B, C и сложенныя, представятъ, какъ извѣстно, нормальную проекцію этой прямой линіи плоскости на направленіе (A, B, C). Но уравненіе (11) доказываетъ, что полученная такимъ образомъ проекція есть нуль или что это направленіе (A, B, C) перпендикулярно ко всякой прямой, разсматриваемой на плоскости; а это вполнѣ подразумѣваетъ нормальность даннаго направленія къ самой этой плоскости.

Теперь, при условіи прямоугольныхъ осей, образуемъ уравненія бинормали, подвижныя координаты которой мы назовемъ черезъ x_1, y_1, z_1. Ясно, что (теперь нормальныя) проекціи (на оси) $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ части, идущей отъ (x, y, z) до (x_1, y_1, z_1), будутъ равняться произведеніямъ этой части на три соотвѣтственныхъ косинуса, пропорціональныхъ къ A, B, C или, слѣдовательно, тремъ знаменателямъ дробей (16). Уравненія бинормали будутъ поэтому:

$$(19) \qquad \frac{x_1 - x}{y'z'' - z'y''} = \frac{y_1 - y}{z'x'' - x'z''} = \frac{z_1 - z}{x'y'' - y'x''}.$$

163. — Кругъ-касательный къ пространственной кривой.

Продолжимъ идею, которая привела насъ къ замѣчанію о кругѣ-касательномъ, или, иначе говоря, разсмотримъ на кривой какія-либо очень сосѣднія точки

$$(x,\ y,\ z),\ (x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z),\ (x + \Delta' x,\ y + \Delta' y,\ z + \Delta' z),$$

стремящіяся совпасть въ одну только M; взявъ плоскость этихъ трехъ точекъ, проведемъ вполнѣ опредѣленный кругъ, который содержалъ бы ихъ всѣ три, и въ то же время, если угодно, уже разсмотрѣнную ортогональную проекцію кривой на плоскость и какую-либо другую (плоскостную или пространственную) линію, проходящую черезъ три точки. Въ предѣлѣ эти различныя линіи будутъ имѣть съ данной кривой контактъ второго порядка, такъ какъ ихъ обѣ облическія проекціи на плоскости xy и xz покажутъ контактъ этого порядка, происшедшій отъ соединенія трехъ сосѣднихъ точекъ пересѣченія.

Такимъ образомъ вполнѣ можно будетъ получить всевозможныя линіи, которыя имѣютъ съ данной въ точкѣ M контактъ второго порядка, характеризующійся (стр. 237), въ проекціяхъ на двѣ плоскости xy и xz, взаимными отрѣзками третьяго порядка малости въ своемъ сосѣдствѣ. Иначе говоря, такая линія можетъ всегда быть считаема предѣломъ перемѣнной кривой, которая представила бы съ данной, при соотвѣтственныхъ абсциссахъ x, $x+\Delta x$, $x+\Delta' x$, три пересѣченія, стремящіяся совпасть, такъ какъ мы знаемъ, что ея проекціи на плоскости xy и xz, по тому же самому, почему онѣ покажутъ контакты второго порадка съ аналогичными проекціями данной, будутъ въ своихъ соотвѣтственныхъ плоскостяхъ предѣлами перемѣнныхъ линій, имѣющихъ каждая съ этими проекціями три общія точки, абсциссы которыхъ будутъ произвольными (стр. 188), лишь бы онѣ стремились къ единственному, означенному предѣлу. Поэтому можно придавать этимъ абсциссамъ значенія x, $x+\Delta x$, $x+\Delta' x$, одинаковыя на обѣихъ плоскостяхъ xy и xz для того, чтобы двѣ измѣняющіяся такимъ образомъ разсматриваемыя линіи этихъ плоскостей были вполнѣ проекціями одной и той же пространственной линіи, имѣющей свои три точки абсциссъ x, $x+\Delta x$, $x+\Delta' x$ общими съ данной кривой и стремящейся въ то же время къ желаемой, неподвижной линіи.

Но обратимся въ частности къ кругу, проходящему черезъ три сосѣднія точки, о которыхъ мы только что говорили,

$$(x,\ y,\ z),\ (x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z),\ (x+\Delta' x,\ y+\Delta' y,\ z+\Delta' z).$$

Въ предѣлѣ этотъ кругъ, тогда расположенный въ плоскости-касательной, вполнѣ будетъ опредѣленъ; разъ его плоскость, равно какъ и направленіе и кривизна его двухъ облическихъ проекцій на двѣ плоскости xy и xz въ мѣстахъ, гдѣ проектирована облически точка контакта, опредѣлены, — это уже даетъ кромѣ его касательной въ этой точкѣ величину и направленіе его радіуса, отъ котораго зависятъ кривизны его двухъ проекцій. Кромѣ того онъ будетъ кругомъ-касательнымъ, общимъ всѣмъ этимъ кривымъ. На самомъ дѣлѣ другой какой-либо кругъ, проходящій черезъ M, не могъ бы имѣть контактъ такого же порядка съ одной какой-либо изъ этихъ кривыхъ, не имѣя также контакта второго порядка съ нимъ, такъ какъ взаимный отрѣзокъ между

этими двумя кругами, измѣряемый въ плоскости, параллельной yz'амъ, очевидно, меньше суммы ихъ соотвѣтственныхъ отрѣзковъ, въ той же самой плоскости, съ кривой, предполагаемой находящейся въ контактѣ второго порядка съ каждымъ изъ нихъ. Но двѣ окружности, которыя, въ окрестностяхъ общей точки M, отстоятъ другъ отъ друга на количества только порядка высшаго, чѣмъ второй, не будутъ лежать въ двухъ различныхъ плоскостяхъ, такъ какъ каждая изъ нихъ представляла бы, какъ всякая кривая, отрѣзки, по крайней мѣрѣ, второго порядка съ плоскостью, которая не была бы ея плоскостью-касательною и, слѣдовательно, со всякой другой кривой, лежащей въ такой плоскости. Такимъ образомъ двѣ окружности имѣли бы въ одной и той же плоскости контактъ второго порядка; а это, какъ извѣстно по теоріи круга-касательнаго къ плоскостнымъ кривымъ, невозможно, по крайней мѣрѣ, когда онѣ не совпадаютъ. Слѣдовательно, можно сказать, что полученный предѣльный кругъ, находящійся въ контактѣ второго порядка какъ съ данной кривой, такъ и съ ея проекціей на плоскость-касательную и съ другими указанными линіями, есть изъ всѣхъ возможныхъ круговъ тотъ, который возлѣ точки M удаляется, въ частности, наименѣе отъ всякой изъ этихъ кривыхъ. Иначе говоря, онъ — ихъ кругъ-касательный.

Остается увидѣть, чтобы опредѣлить центръ и радіусъ круга-касательнаго, каково, съ аналической точки зрѣнія, взаимное соединеніе этого круга и прочихъ линій, находящихся во взаимномъ контактѣ второго порядка.

Для этого разсмотримъ ихъ не въ ихъ предѣльныхъ положеніяхъ, какъ сейчасъ, но въ такое мгновеніе, когда онѣ проходятъ черезъ три сосѣднія точки (x, y, z), $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$, $(x+\Delta' x,\ y+\Delta' y,\ z+\Delta' z)$; и предположимъ ихъ описываемыми, въ одно и то же время и при безпрерывномъ движеніи, мобилями, которые прибываютъ вмѣстѣ въ каждую изъ трехъ данныхъ точекъ въ соотвѣтственныя эпохи t, $t+\Delta t$, $t+\Delta' t$. Это движеніе можетъ быть напр. такимъ, что мобили находятся постоянно въ плоскости, параллельной yz, или имѣютъ одну и ту же абсциссу x; вслѣдствіе этого ихъ разстоянія будутъ тѣми взаимными отрѣзками кривыхъ, которыя были уже нами разсмотрѣны. Образуемъ въ каждой кривой выраженія (13) [стр. 241] Δx, Δy, Δz, $\Delta' x$, $\Delta' y$, $\Delta' z$ и затѣмъ, раздѣливъ ихъ соотвѣтственно на Δt и $\Delta' t$, выраженія разностей $\frac{\Delta' x}{\Delta' t} - \frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta' y}{\Delta' t} - \frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta' z}{\Delta' t} - \frac{\Delta z}{\Delta t}$, которыя будутъ $(x'' + \ldots)\frac{\Delta' t - \Delta t}{2}$, etc... Отношенія $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{2}{\Delta' t - \Delta t}\left(\frac{\Delta' x}{\Delta' t} - \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$, ... будутъ общими всѣмъ кривымъ, поэтому ихъ предѣлы x', x'', ... будутъ также общими; а, слѣдовательно, *въ кривыхъ, находящихся въ контактѣ второго порядка, три функціи x, y, z отъ t будутъ имѣть въ общей точкѣ (x, y, z) не только одни и тѣ же значенія, но также однѣ и тѣ же первыя и вторыя производныя.*

Кромѣ того, если придать x', y', z', x'', y'', z'' въ трехъ первыхъ формулахъ (13) эти значенія, общія всѣмъ даннымъ кривымъ, и заставить Δt варіировать съ нуля, для того, чтобы Δx, Δy, Δz, были одновременными варіаціями координатъ вдоль какой-либо малой дуги одной изъ кривыхъ, то можно будетъ видѣть, что во всѣхъ этихъ кривыхъ эти варіаціи въ одинъ и тотъ же моментъ будутъ отличаться только на ненаписанные члены, порядокъ малости которыхъ будетъ выше второго; вслѣдствіе этого взаимныя разстоянія мобилей, описывающихъ заразъ кривыя, и слѣдовательно такія же разстоянія этихъ послѣднихъ не достигнутъ второго порядка. Иначе говоря, контактъ между кривыми вполнѣ этого порядка, разъ x, y, z съ ихъ первыми и вторыми производными имѣютъ значенія, общія въ данной точкѣ.

Эти аналитическія условія, такимъ образомъ достаточныя для того, чтобы контактъ былъ второго порядка, позволяютъ сказать, что этимъ кривымъ можно будетъ придать двѣ общія и безконечно-сосѣднія точки и, въ этихъ точкахъ, однѣ и тѣ же касательныя или однѣ и тѣ же нормальныя плоскости. Дѣйствительно нахожденіе касательной въ первой точкѣ (x, y, z) равняется полученію производныхъ x', y', z', а нахожденіе касательной въ сосѣдней точкѣ, координаты которой будутъ взяты въ предѣлѣ, если считать ихъ малыя превышенія надъ x, y, z въ видѣ $x+x'dt$, $y+y'dt$, $z+z'dt$, равняется полученію первыхъ производныхъ координатъ, производныхъ, одинаково приводимыхъ къ $x'+x''dt$, $y'+y''dt$, $z'+z''dt$, или водразумѣваетъ нахожденіе x'', y'', z'' въ точкѣ (x, y, z) въ виду роли малыхъ измѣненій направленія, выражающихся черезъ $x''dt$, $y''dt$, $z''dt$, не менѣе главной, чѣмъ роль одновременныхъ измѣненій расположенія $x'dt$, $y'dt$, $z'dt$. И плоскость-касательная въ (x, y, z), которую опредѣляетъ касательная въ этой точкѣ съ параллелью къ сосѣдней касательной, будетъ такою же и для всѣхъ прочихъ разсматриваемыхъ линій. Но въ кругѣ центръ есть пересѣченіе двухъ нормальныхъ плоскостей и плоскости-касательной, которыя общи ему съ прочими линіями, въ частности съ данной пространственной кривой. Такъ какъ эта плоскость-касательная и первая нормальная плоскость пересѣкаются по соотвѣтствующей главной нормали, то можно высказать слѣдующее правило:

Центръ круга-касательнаго пространственной кривой для данной точки находится на пересѣченіи главной нормали къ этой точкѣ нормальной безконечно-сосѣдней плоскостью, т.-е. въ предѣльномъ положеніи точки, въ которой эта главная нормаль пересѣкаетъ нормальную плоскость, неопредѣленно приближающуюся къ ней.

164. — Координаты центра и радіусъ этого круга.

Это правило легко приводитъ къ выраженію координатъ, которыя я назову черезъ x_1, y_1, z_1, центра круга-касательнаго для точки (x, y, z) данной пространственной кривой. Предположимъ оси прямоугольными

и возьмемъ дугу s кривой за независимое перемѣнное для того, чтобы уравненія главной нормали обратились въ (18) [стр. 246]. Нормальная плоскость, которая содержитъ эту нормаль, имѣетъ уравненіемъ (10) [стр. 240], а сосѣдняя нормальная плоскость — то же уравненіе, гдѣ только x, y, z и x', y', z' будутъ увеличены на свои дифференціалы $x'dt$, $y'dt$, $z'dt$ и $x''dt$, $y''dt$, $z''dt$. Но, такъ какъ дѣло идетъ о разсмотрѣніи точки, общей двумъ нормальнымъ плоскостямъ, или о томъ, что x_1, y_1, z_1 будутъ однимъ и тѣмъ же въ обѣихъ плоскостяхъ, то уравненіе второй можетъ быть замѣнено своей разностью съ уравненіемъ первой, раздѣленной на dt; а это дастъ, какъ первую часть новаго уравненія, производную первой части (10)-го вдоль дуги ds, получаемую, если взять x_1, y_1, z_1 за постоянныя. Эта производная образуется безъ труда; дѣйствительно, напр. для перваго члена $x'(x_1-x)$, множители x' и x_1-x котораго имѣютъ соотвѣтственно для производныхъ x'' и $-x'$, производная есть $x''(x_1-x)-x'^2$. Замѣчая, что сумма $-x'^2$, $-y'^2$ и $-z'^2$ будетъ равняться здѣсь -1 по первому (9) [стр. 239], и заставляя перейти этотъ членъ -1 во вторую часть, нулевую до сихъ поръ, мы получимъ уравненіе, подстановленное такимъ образомъ на мѣсто уравненія второй нормальной плоскости; это уравненіе, которое должно быть соединено съ двумя (18) главной нормали, будетъ:

$$x''(x_1-x)+y''(y_1-y)+z''(z_1-z)=1. \tag{20}$$

Но если мы сложимъ почленно три отношенія (18), умноживъ ихъ соотвѣтственно въ числителѣ и знаменателѣ на x'', y'', z'', то мы получимъ новое отношеніе, равное

$$\frac{x''(x_1-x)+y''(y_1-y)+z''(z_1-z)}{x''^2+y''^2+z''^2}.$$

Очевидно мы можемъ въ то время, какъ будемъ приравнивать это отношеніе другимъ, подставить въ его числителѣ значеніе 1, получаемое изъ (20), и выразить этимъ самымъ, въ полученномъ такимъ образомъ кратномъ равенствѣ, что этотъ числитель равняется на самомъ дѣлѣ единицѣ, или что уравненіе (20) удовлетворено. Поэтому мы можемъ замѣнить совокупность уравненія (20) и двухъ пропорцій (18) тройной пропорціей

$$\frac{x_1-x}{x''}=\frac{y_1-y}{y''}=\frac{z_1-z}{z''}=\frac{1}{x''^2+y''^2+z''^2}; \tag{21}$$

и сравненіе каждаго изъ трехъ первыхъ отношеній съ четвертымъ дастъ наконецъ искомыя координаты x_1, y_1, z_1 центра круга или скорѣе, что приводитъ къ одному и тому же, ихъ превышенія надъ координатами x, y, z точки контакта

$$(x_1-x,\ y_1-y,\ z_1-z)=\frac{(x'',\ y'',\ z'')}{x''^2+y''^2+z''^2}. \tag{22}$$

Эти три разности $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ суть три проекціи, на оси, прямой, соединяющей точку контакта (x, y, z) съ центромъ (x_1, y_1, z_1), т.-е. самого радіуса круга-касательнаго, радіуса, который я назову черезъ R, какъ и въ этюдѣ о плоскостныхъ кривыхъ, но возьму его по абсолютной величинѣ. Очевидно, онъ будетъ равняться квадратному корню суммы квадратовъ вторыхъ частей (22). Поэтому, его выраженіе, послѣ очевиднаго упрощенія, будетъ:

$$R = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}; \tag{23}$$

а введеніе R^2 въ видѣ множителя на мѣсто общаго знаменателя $x''^2 + y''^2 + z''^2$ позволитъ придать соотношеніямъ (22) наиболѣе простую форму

$$x_1 - x = R^2 x'', \quad y_1 - y = R^2 y'', \quad z_1 - z = R^2 z''. \tag{24}$$

Таковы формулы, которыя, выражая для круга-касательнаго пространственной кривой радіусъ R, выходящій изъ точки контакта, и его три проекціи на оси, позволяютъ построить центръ въ пространствѣ и нанести затѣмъ этотъ кругъ на плоскости-касательной. Не слѣдуетъ забывать, что онѣ обязаны своей крайней простотой выбору дуги за независимое перемѣнное, и что, если взять на его мѣсто другое какое-либо перемѣнное t, или, если символъ $\frac{d}{ds}$ будетъ замѣненъ черезъ $\frac{1}{s'}\frac{d}{dt}$, то производныя x'', y'', z'' сдѣлаются

$$\frac{1}{s'}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{s'}\frac{dx}{dt}\right) \text{ или } \frac{1}{s'}\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{s'}\right) = \frac{s'^2 x'' - x's's''}{s'^4}, \text{ etc...}$$

съ слѣдующимъ выраженіемъ квадрата производной дуги

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2;$$

отсюда слѣдуетъ, если продифференцировать, для произведенія $s's''$ значеніе

$$s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z''.$$

166. — Уголъ смежности; вычисленіе его при помощи разсмотрѣнія нормалей.

Пусть будетъ MM' безконечно-малая дуга ds данной пространственной кривой AB и MCN, $M'CN'$ слѣды двухъ послѣдовательныхъ нормальныхъ плоскостей PCM и PCM' на плоскости, проходящей черезъ касательную MT въ M и черезъ сосѣднюю точку M'. Эта плос-

кость, почти совпадающая съ плоскостью-касательною, построенной по MT, которая есть ея предѣлъ, встрѣтитъ пересѣченіе CP двухъ нормальныхъ плоскостей въ точкѣ C, безконечно приближенной къ той, въ которой встрѣтитъ это пересѣченіе плоскость-касательная, и, слѣдовательно, которвя есть безконечно-сосѣдняя съ центромъ (x_1, y_1, z_1) круга-касательнаго. Поэтому C можно взять за этотъ центръ и MC за радіусъ R круга. Кромѣ того, плоскость $TMCM'$ будетъ по направленію безконечно-близка съ той, предѣлъ которой есть также плоскость-касательная въ M, содержащая касательную MT съ параллелью къ сосѣдней касательной $M'T'$ и, будучи такимъ образомъ перпендикулярной къ двумъ сторонамъ двуграннаго угла $MCPM'$, пересѣкающая его по его линейному углу. Этотъ послѣдній есть, слѣдовательно, проекція MCM''a подъ безконечно-малымъ угломъ и имѣетъ съ MCM' отношеніе, стремящееся къ единицѣ; а это позволяетъ сказать, что уголъ MCM' можетъ быть взятъ за мѣру измѣненія направленія, измѣненія, получаемаго нормальной плоскостью вдоль элементарной отсѣченной дуги MM' или ds. То же самое измѣненіе вычисляется еще угломъ между двумя Ot и Ot', выходящими, начиная съ одной и той же точки пространства, съ начала O напр., перпендикулярно къ двумъ разсмотрѣннымъ нормальнымъ плоскостямъ или параллельно двумъ касательнымъ MT, MT'; дѣйствительно, мы знаемъ, что подобный уголъ tOt', образованный въ плоскости, перпендикулярной къ ребру CP діэдра $MCPM'$, имѣетъ свои стороны перпендикулярными къ сторонамъ линейнаго угла, по которому этотъ двугранный пересѣкается тою же самою плоскостью, и который, слѣдовательно, равенъ ему, такъ какъ не можетъ быть (въ виду его безконечно-малой величины) его дополнительнымъ.

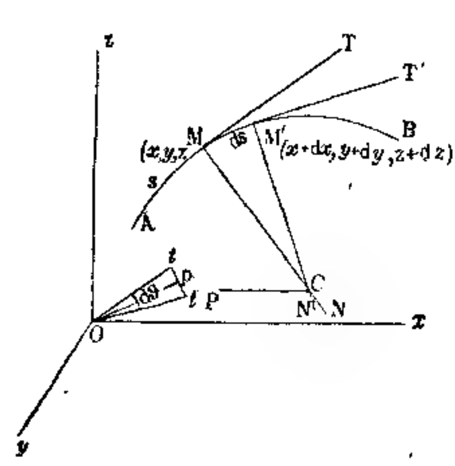


Fig. 38.

Уголъ tOt', стороны котораго соотвѣтственно параллельны двумъ послѣдовательнымъ касательнымъ MT, $M'T'$, и уголъ MCM', который можно разсматривать, какъ образованный главной нормалью въ M и нормалью, соединяющею ее съ сосѣдней точкой M', измѣряютъ, слѣдовательно, общее измѣненіе направленія или касательной, или нормальной плоскости вдоль безконечно-малой дуги MM' или ds. Они составляютъ то, что, какъ и при плоскостныхъ кривыхъ, называютъ *угломъ смежности;* мы будемъ представлять его всегда черезъ $d\theta$.

Такъ какъ мы уже знаемъ радіусъ $MC = R$ круга-касательнаго, то вычислимъ $d\vartheta$ при помощи треугольника MCM', аналогичнаго съ треугольникомъ стр. 200. Пропорція синусовъ дастъ, очевидно,

$$\frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{ds}, \tag{29}$$

а если подставимъ затѣмъ на мѣсто R его значеніе (23), то

$$d\vartheta = \frac{ds}{R} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}\, ds \text{ *)}. \tag{30}$$

169. — Кривизна пространственной кривой.

Естественно при пространственной кривой, какъ при плоскостной кривой, называть *кривизной* въ извѣстной точкѣ измѣненіе направленія, $d\vartheta$, которое получаетъ касательная или нормальная плоскость на безконечно-маломъ протяженіи ds, отнесенное (измѣненіе) къ единицѣ длины, т.-е. раздѣленное на этотъ безконечно-малый путь ds, вдоль котораго это измѣненія происходитъ. Поэтому кривизна будетъ опять частнымъ угла смежности $d\vartheta$ на соотвѣтствующую элементарную дугу ds; и формула (30) дастъ

$$\text{кривизна или } \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{R} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}. \tag{33}$$

Кривизна поэтому выражается при пространственныхъ кривыхъ, какъ и при плоскостныхъ, обратнымъ числомъ радіуса круга-касательнаго. Такимъ образомъ этотъ кругъ называется еще *кругомъ кривизны*; его центръ *центромъ кривизны* и его радіусъ — *радіусомъ кривизны*.

170. — Уголъ крученія безконечно-малой дуги пространственной кривой.

Плоскостная кривая отличается отъ пространственной только тѣмъ, что всѣ ея плоскости-касательныя имѣютъ одно и то же направленіе и совпадаютъ между собой, чтобы дать единственную плоскость кривой. Напротивъ, въ пространственной кривой направленіе плоскости-касательной измѣняется отъ одной точки до другой. Измѣненіе этого направленія вдоль безконечно-малой дуги MM' или ds (fig. 39) измѣряется измѣненіемъ же перпендикуляра къ плоскости-касательной или бинормали, которая имѣетъ положеніе MP въ первой оконечности, положеніе $M'P'$ во второй и вращается такимъ образомъ вдоль взятой дуги на уголъ pOp' двухъ прямыхъ, соотвѣтственно проходящихъ изъ начала параллельно MP и $M'P'$. Такъ какъ этотъ уголъ pOp' былъ бы нулемъ въ плоскостной кривой, то онъ и представляетъ мѣру различія между M и M',

) Чтобы вполнѣ убѣдиться въ вѣрности формулы (30), стоитъ только вычислить уголъ tOt' изъ равнобедреннаго треугольника tOt' при помощи косинусовъ директоровъ прямыхъ Ot и Ot' (см. часть II, статьи 167 и 168*).

находящихся на данной пространственной кривой или находящихся на плоскостной кривой, почему онъ и можетъ характеризовать *искривленность* дуги MM'. Онъ получилъ (по какой причинѣ, мы это увидимъ вскорѣ) названіе *угла крученія*. Мы будемъ представлять его черезъ $d\tau$.

Такъ какъ безконечно-малый уголъ между двумя прямыми линіями равняется [по формулѣ (32) статьи 167*] квадратному корню изъ суммы квадратовъ разностей между ихъ косинусами-директорами, то, если назвать косинусы-директоры бинормали MP черезъ A, B, C, а косинусы-директоры бинормали $M'P'$ черезъ $A+A'ds$, $B+B'ds$, $C+C'ds$, — мы получимъ

$$(34)\left\{\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{(A-A-A'ds)^2+(B-B-B'ds)^2+(C-C-C'ds)^2}=\\ &=\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}\; ds.\end{aligned}\right.$$

Остается вычислить три производныя A', B' C', что мы получимъ, если продифференцируемъ уже извѣстныя соотношенія (8) и (14), основанныя на свойствахъ косинусовъ-директоровъ, именно:

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} &A^2+B^2+C^2=1,\\ &Ax'+By'+Cz'=0,\\ &Ax''+By''+Cz''=0.\end{aligned}\right.$$

Fig. 39.

Первое (раздѣленное на 2) и второе даютъ вслѣдствіе дифференцированія:

$$AA'+BB'+CC'=0,$$

$$x'A'+y'B'+z'C'+Ax''+By''+Cz''=0.$$

Но они опредѣляютъ только взаимныя отношенія A''a, B', C', если уничтожить изъ второго часть $Ax''+By''+Cz''$, нуль въ виду третьяго (35); кромѣ того они будутъ удовлетворяться подстановкой на мѣсто A', B', C' выраженій x'', y'', z'', которыя измѣняютъ ихъ соотвѣтственно въ третье (35) и во второе соотношеніе (9) (стр. 239), всегда удовлетворяющееся, когда оси прямоугольны и дуга s взята за перемѣнное. Поэтому дифференцированіе двухъ первыхъ соотношеній (35) заставляетъ взять двойную пропорцію

$$(36)\qquad \frac{A'}{x''}=\frac{B'}{y''}=\frac{C'}{z''}=\frac{A'x''+B'y''+C'z''}{x''^2+y''^2+z''^2},$$

къ которой я прибавилъ четвертое такое же отношеніе, образующееся отъ почленнаго сложенія трехъ первыхъ послѣ соотвѣтственнаго умноженія членовъ въ числителѣ и знаменателѣ на x'', y'', z''. Но дифференцированіе третьяго соотношенія (55) даетъ

$$(36,\ \text{bis})\qquad A'x''+B'y''+C'z''=-(Ax'''+By'''+Cz''').$$

Но такъ какъ соотношеніе (16), возведенное въ квадратъ и почленно сложенное, даетъ $\frac{A}{y'z''-z'y''} = \frac{1}{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+\ldots}}$, а подкоренное количество тождественно равно $(x'^2+y'^2+z'^2)(x''^2+y''^2+z''^2)-(x'x''+y'y''+z'z'')^2$ или, по (9), $x''^2+y''^2+z''^2$, то $A=R(y'z''-z'y'')$. Точно такъ же найдемъ $B=R(z'x''-x'z'')$, $C=R(x'y''-y'x'')$. Эти значенія, введенныя въ (36, bis), дадутъ

$$A'x''+B'y''+C'z''=-R\omega,$$

гдѣ ω, для краткости, означаетъ детерминантъ, образующійся девятью первыми, вторыми и третьими производными отъ x, y, z,

$$(37)\quad \begin{cases} \omega=(y'z''-z'y'')x'''+(z'x''-x'z'')y'''+(x'y''-y'x'')z''' \\ \quad =x'(y''z'''-z''y''')+y'(z''x'''-x''z''')+z'(x''y'''-y''x'''). \end{cases}$$

Четвертое отношеніе (36) напишется, если вспомнить выраженіе (23) R'а (стр. 251), просто черезъ $-R^2\omega$. И изъ трехъ первыхъ отношеній (36), сравниваемыхъ отдѣльно съ четвертымъ, получатся искомыя формулы производныхъ A', B', C':

$$(38)\qquad A'=-R^3\omega x'',\quad B'=-R^3\omega y'',\quad C'=-R^3\omega z''.$$

Благодаря этимъ простымъ значеніямъ*) уголъ крученія $d\tau$, выражаемый третьей частью (34), будетъ, если замѣтить, что сумма $x''^2+y''^2+z''^2$ есть обратное R^2'а, и взять результатъ по абсолютной величинѣ,

$$(39)\qquad d\tau=\sqrt{R^4\omega^2}\,ds=\pm R^2\omega ds.$$

Поэтому, если раздѣлить его на ds и подставить на мѣсто R и ω ихъ явныя значенія, то отношеніе угла крученія къ дугѣ ds получится изъ формулы

$$(40)\quad \frac{d\tau}{ds}=\pm\frac{x'(y''z'''-z''y''')+y'(z''x'''-x''z''')+z'(x''y'''-y''x''')}{x''^2+y''^2+z''^2}.$$

171. — Выгибъ въ данной точкѣ пространственной кривой.

Отношеніе $d\tau$ къ ds, которое мы только что вычислили и которое для данной точки (x, y, z), въ нѣкоторомъ родѣ, выражаетъ степень искривленности кривой, т.-е. измѣненіе ея плоскости-касательной на единицѣ длины ея дуги, — часто называется *второй кривизной* кривой по аналогіи, которую она представляетъ съ обыкновенной кривизной, которая есть также отношеніе безконечно-малаго угла $d\vartheta$, измѣряющаго измѣненіе направленія, къ дугѣ ds, вдоль которой происходитъ это из-

*) Выведеннымъ M. Frenet, бывшимъ профессоромъ [illegible]скаго Faculté des Sciences.

мѣненіе. Но это названіе *второй кривизны* — неудобно, такъ какъ въ *прямой* линіи, примѣнять кривизну къ которой было бы абсурдомъ, отношеніе $d\tau$ къ ds не есть нуль, но лишь неопредѣленность, такъ какъ ничто не мѣшаетъ за плоскости-касательныя для различныхъ точекъ прямой брать какія-либо плоскости, проходящія черезъ эту прямую и имѣющія направленіе, произвольно измѣняющееся въ видѣ функціи s'а. Это замѣтилъ Сенъ-Венанъ (M. de Saint-Venant), который предложилъ называть это отношеніе $\frac{d\tau}{ds}$ *выгибомъ* кривой.

Точно также по аналогіи съ отношеніемъ $\frac{ds}{d\vartheta}$, обратнымъ отъ $\frac{d\vartheta}{ds}$ и представляющимъ радіусъ кривизны R, отношеніе $\frac{ds}{d\tau}$ иногда называютъ *радіусомъ второй кривизны*, выраженіе, которое надо замѣнить *радіусомъ выгиба:* это есть линія, какъ и R, но которая не содержитъ столь простого геометрическаго обозначенія.

Замѣтимъ, что выраженіе (33) [стр. 253] кривизны содержитъ только вторыя производныя координатъ по отношенію къ дугѣ, тогда какъ, напротивъ, выраженіе (40) выгиба зависитъ вмѣстѣ отъ ихъ первыхъ, вторыхъ и третьихъ производныхъ. А это позволяетъ сказать, что чтобы опредѣлить выгибъ, надо давать на кривой четыре безконечно-сосѣднихъ точки, а не три только, какъ при кривизнѣ. Но это вѣдь можно получить, такъ какъ, когда дѣло идетъ о томъ, плоскостная ли или нѣтъ кривая, четыре послѣдовательныя точки всегда необходимы, потому что три первыхъ опредѣлятъ только плоскость, изъ которой можетъ выйти только четвертая.

172. — Какъ всякая пространственная кривая можетъ получаться посредствомъ крученія изъ плоскостной кривой.

Выгибъ, отношеніе $d\tau$ къ ds, называется еще *крученіемъ*, въ разсматриваемой точкѣ, пространственной кривой на единицѣ длины: онъ выражаетъ, дѣйствительно, то, чѣмъ сдѣлался бы при дугѣ, равной 1 и считаемой съ этой точки, уголъ крученія, который есть $d\tau$ при безконечно-малой дугѣ ds, если бы онъ продолжалъ увеличиваться на этой конечной длинѣ 1, какъ онъ дѣлалъ это на длинѣ ds. Но такое обозначеніе угла крученія требуетъ разъясненія: этимъ я и закончу разсмотрѣніе общихъ и самыхъ важныхъ свойствъ кривыхъ.

Возьмемъ на данной кривой очень близкія другъ къ другу точки A, B, C, D, E,… которыя расположены постепеннымъ образомъ, напр. на равныхъ разстояніяхъ ds. Очевидно мы совершимъ вездѣ очень малыя ошибки, если замѣнимъ истинныя плоскости-касательныя въ A, B, C,… соотвѣтственно черезъ плоскости ABC, BCD, CDE,…,

изъ которыхъ каждая содержитъ три послѣдовательныхъ точки или двѣ соотвѣтственныя хорды AB и BC, BC и CD, etc. Послѣднія, продолженныя въ T, T', T''...., могутъ точно также замѣняться касательными къ кривой. Тогда уголъ, называемый угломъ *крученія* и соотвѣтствующій элементарной дугѣ AB, не будетъ замѣтно отличаться отъ угла между двумя плоскостями ABC, BCD; дѣйствительно двѣ подвижныя плоскости, всегда почти совпадающія вмѣстѣ, изъ которыхъ первая будетъ получать послѣдовательно и безпрерывно положенія ABC, BCD, CDE,..., тогда какъ другая будетъ дѣлаться послѣдовательно плоскостью-касательной къ кривой въ A, въ B, въ C, .., не могутъ перестать получать, отъ одного мгновенія до другого, почти одни и тѣ же измѣненія расположенія*) или вращаться на одни и тѣ же количества; отсюда слѣдуетъ, что истинные углы крученія, описываемые второй плоскостью, не отличаются въ замѣтномъ отношеніи отъ угловъ, описываемыхъ первою и заключающихся между послѣдовательными плоскостями ABC, BCD, etc... Точно также углы TBT', $T'CT''$, .., заключенные между продолженіями смежныхъ хордъ, могутъ быть взяты за углы смежности соотвѣтсвенныхъ дугъ AB, BC,...; это доказывалось бы аналогичнымъ разсмотрѣніемъ двухъ прямыхъ, движущихся постепеннымъ образомъ и всегда почти совпадающихъ вмѣстѣ, изъ которыхъ первая принимала бы послѣдовательно положенія AB, BC, CD, .., тогда какъ другая, постоянно касательная, дотрогивалась бы послѣдовательно до кривой въ A, въ B, въ C,... или описывала бы въ своемъ вращеніи истинные углы смежности.

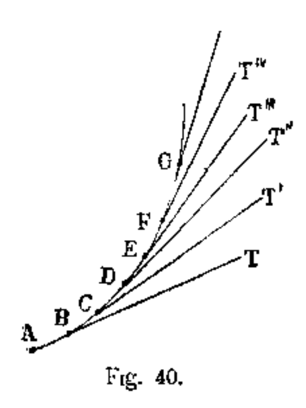


Fig. 40.

Теперь сдѣлаемъ плоскость-касательную $ABTT'$ неподвижной и представимъ себѣ, что заставляютъ вокругъ BCT', какъ шарньера, всякую часть $BCDE$... кривой, которая начинается съ точки B, повернуться на уголъ, равный углу крученія AB'а, т.-е. діэдру между двумя плоскостями ABC, BCD, такъ что точка D получается въ первой плоскости-касательной ABC безъ измѣненія угла смежности $T'CT''$. Затѣмъ, вокругъ новаго положенія CDT'''а, какъ шарньера, мы заставляемъ повернуться также слѣдующую часть $CDEF$... на уголъ, равный углу крученія дуги BC; поэтому точка E приходитъ въ плоскость $ABCD$ безъ измѣненія угла смежности $T''DT'''$. Продолжая такимъ образомъ, т.-е. производя вокругъ послѣдовательныхъ *касательныхъ* BC, CD, DE... вращенія части кривой, которая начинается въ ихъ точки контакта,

*) Опредѣляемыя аналитически при помощи варіированій, получаемыхъ напр. ихъ косинусами-директорами.

для того, чтобы привести мало-по-малу всѣ углы смежности, безъ измѣненія ихъ величинъ, въ плоскость TBT', мы будемъ имѣть въ концѣ концовъ (если A, B, C, D... безконечно сосѣдни) данную пространственную кривую трансформированною въ плоскостную кривую, элементарныя дуги которой AB, BC, CD,... будутъ сохранять не только свои длины, но даже свои углы смежности и, слѣдовательно, свои первоначальные радіусы кривизны.

Наоборотъ, чтобы сдѣлать изъ плоскостной, полученной такимъ образомъ, кривой пространственную кривую, достаточно будетъ произвести подобныя вращенія въ обратномъ смыслѣ, т.-е. заставить повернуться всякую часть $BCDE$... вокругъ BT', какъ шарньера, на уголъ, равный соотвѣтственному углу крученія AB'а, затѣмъ произвести аналогичныя вращенія вокругъ прочихъ касательныхъ CT'', DT''', etc... Поэтому правильно называютъ *крученіемъ* тѣла способъ деформаціи, который заключается въ томъ, что заставляютъ вращаться вокругъ оси всякую часть тѣла, расположенную по одну сторону точки, разсматриваемой на оси, тогда какъ часть по другую сторону остается неподвижной, или, по крайней мѣрѣ, совокупность безконечнаго числа подобныхъ деформацій, имѣющихъ цѣлью выраженіе все болѣе и болѣе значительныхъ вращеній частей тѣла, все болѣе и болѣе удаленныхъ отъ его перваго конца (предполагаемаго неподвижнымъ). Слѣдовательно, *всякая пространственная кривая есть скрученная плоскостная кривая или можетъ быть получена изъ плоскостной кривой при помощи простыхъ крученій, производимыхъ вокругъ ея касательныхъ и не измѣняющихъ ни длины, ни кривизны дугъ.*

Эти крученія измѣряются, для каждой безконечно-малой дуги ds, наклоненіемъ $d\tau$, которое получается плоскостями-касательными, проведенными къ двумъ ея концамъ и сначала совпадавшими съ плоскостью первоначальной кривой. Поэтому вполнѣ естественно называть уголъ $d\tau$ угломъ крученія и брать вездѣ отношеніе $\frac{d\tau}{ds}$ за мѣру и *выгиба*, которымъ отличается пространственная кривая отъ плоскостной, и крученія, которое можетъ считаться, какъ производитель этого выгиба.

ГЛАВА XIII.

Кривыя поверхности; касательная плоскость и *особенныя точки; нормаль; *линіи наклона.

173. — Касательная плоскость къ поверхности.

По тому, что мы видѣли въ № 41 и полнѣе въ № 42*, всякая поверхность, уравненіе которой при прямолинейныхъ координатахъ имѣютъ форму $F(x, y, z) = \text{const.}\, c$ съ первой частью, безпрерывною функціею x'а, y, z, имѣющей первыя производныя безпрерывными, — допускаетъ вообще къ каждой (x, y, z) изъ своихъ точекъ *касательную* плоскость, отъ которой она отдаляется на маломъ разстояніи вокругъ *точки контакта* (x, y, z) на количества, сравниваемыя съ квадратами этихъ разстояній, и которая есть мѣсто касательныхъ, проходящихъ въ эту самую точку ко всѣмъ кривымъ, перекращивающимся здѣсь на поверхности. Исключеніе представляютъ только точки, назыв. *особенными*, принадлежащія извѣстнымъ поверхностямъ и уничтожающія заразъ три частныхъ производныхъ отъ F по x, y, z.

Если уравненіе поверхности рѣшено по отношенію къ z или взято въ формѣ $z = f(x, y)$ и если p и q означаютъ двѣ частныя производныя по x и y ординаты $z = f(x, y)$, то мы уже знаемъ (стр. 89) уравненіе касательной плоскости при x_1, y_1, z_1 для подвижныхъ координатъ:

$$(1) \qquad z_1 - z = p(x_1 - x) + q(y_1 - y).$$

Но когда уравненіе поверхности, для большей общности, — формы $F(x, y, z) = c$, то, чтобы получить уравненіе касательной плоскости, введемъ въ соотношеніе (1) значенія p и q, которыя дало (въ № 66) дифференцировеніе $F(x, y, z) = c$, и мы получимъ

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x_1 - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(y_1 - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(z_1 - z) = 0.$$

Напр., поверхность второго порядка, отнесенная къ своему центру и тремъ сопряженнымъ полудіаметрамъ, имѣетъ своимъ уравненіемъ

$$(3) \qquad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1,$$

гдѣ A, B, C — три положительныхъ или отрицательныхъ постоянныхъ; поэтому частныя производныя первой части $F(x, y, z)$, послѣ раздѣленія на общій множитель 2, дѣлаются $\frac{x}{A}$, $\frac{y}{B}$, $\frac{z}{C}$; а уравненіе (2) касательной плоскости дѣлается

$$\frac{x(x_1-x)}{A}+\frac{y(y_1-y)}{B}+\frac{z(z_1-z)}{C}=0$$

или

$$\frac{xx_1}{A}+\frac{yy_1}{B}+\frac{zz_1}{C}=\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}.$$

Замѣнимъ вторую часть ея значеніемъ 1, получаемымъ изъ (3), и это уравненіе касательной плоскости къ поверхности второго порядка приметъ форму, вполнѣ симметричную по отношенію къ x и x_1, y и y_1, z и z_1

$$(4) \qquad \frac{xx_1}{A}+\frac{yy_1}{B}+\frac{zz_1}{C}=1.$$

Слѣдуетъ замѣтить, что оно первой степени какъ по отношенію къ координатамъ x, y, z точки контакта, такъ и по отношенію къ подвижнымъ координатамъ x_1, y_1, z_1.

Наконецъ, можно, какъ это изложено въ концѣ № 7, разсматривать поверхность, какъ мѣсто группы кривыхъ, описываемыхъ различными точками одной и той же линіи, которая, отъ одного мгновенія t до другого, перемѣщается, измѣняясь извѣстнымъ способомъ. Тогда координаты x, y, z суть функціи, вдоль каждой кривой, независимаго перемѣннаго t и, отъ одной кривой до другой и при одномъ и томъ же значеніи t, параметра α, номера порядка различныхъ точекъ образующей линіи; чтобы представить такую поверхность, имѣемъ три уравненія одной и той же формы $x=f_1(t, \alpha)$, $y=f_2(t, \alpha)$, $z=f_3(t, \alpha)$. Послѣдовательныя положенія образующей линіи будутъ устанавливать на поверхности вторую группу кривыхъ, которыя перекрещиваютъ первыя и которыя имѣютъ α за перемѣнное (вдоль каждой кривой), а t за параметръ.

Такъ какъ два соотношенія $x=f_1(t, \alpha)$, $y=f_2(t, \alpha)$ опредѣляютъ t и α въ видѣ функціи отъ x и y, и такъ какъ, слѣдовательно, z или $f_3(t, \alpha)$ дѣлается сложной функціей x'а и y'а при помощи промежуточ-

ныхъ функцій t и α, то легко можно выразить производныя по x и y отъ t, α и, слѣдовательно, z'а посредствомъ непосредственно вычисляемыхъ производныхъ отъ f_1, f_2 и f_3, или отъ x, y и z по t и α. Наконецъ, подстановка въ предыдущее уравненіе (1) такимъ образомъ найденныхъ значеній для производныхъ p и q отъ z по отношенію къ x и y дала бы уравненіе касательной плоскости.

Но послѣднее, которое всегда можно писать пременно, съ тремя неопредѣленными коэффиціентами A, B, C, въ видѣ

$$A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)=0, \tag{5}$$

получается способомъ, менѣе отвлеченнымъ, если замѣтить, что касательная плоскость въ (x, y, z) содержитъ касательную къ двумъ кривымъ $\alpha=\text{const}$ и $t=\text{const}$, которыя здѣсь можно провести, или при каждой элементъ ds, имѣющій своими облическими проекціями dx, dy, dz, выражающіяся соотвѣтственно подъ сокращенной формой черезъ $\frac{d(x,y,z)}{dt}\,dt$ и черезъ $\frac{d(x,y,z)}{d\alpha}\,d\alpha$. Поэтому можно въ (5) подставить на мѣсто x_1-x, y_1-y, z_1-z эти двѣ системы значеній dx, dy, dz; а это послѣ сокращенія на общій множитель dt или $d\alpha$ даетъ два соотношенія:

$$A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=0\quad,\quad A\frac{dx}{d\alpha}+B\frac{dy}{d\alpha}+C\frac{dz}{d\alpha}=0 \tag{6}$$

и для A, B, C получаются три *пропорціональныхъ* значенія, могущихъ быть подставленными въ (5),

$$\begin{cases} A=\frac{dy}{dt}\frac{dz}{d\alpha}-\frac{dz}{dt}\frac{dy}{d\alpha}, \\ B=\frac{dz}{dt}\frac{dx}{d\alpha}-\frac{dx}{dt}\frac{dz}{dx}, \\ C=\frac{dx}{dt}\frac{dy}{d\alpha}-\frac{dy}{dt}\frac{dx}{d\alpha}. \end{cases} \tag{7}$$

Благодаря этимъ значеніямъ плоскость, выражающаяся уравненіемъ (5), будетъ вполнѣ содержать касательную въ (x, y, z) ко всякой кривой, проходящей здѣсь на поверхности, или (что приводитъ къ тому же) элементъ ds, получающійся, если заставить увеличиться t и α на безконечно-малыя какія-либо величины dt и $d\alpha$. Дѣйствительно, облическія проекціи, dx, dy, dz, отъ ds на оси будутъ выражаться черезъ $\frac{d(x,y,z)}{dt}\,dt+\frac{d(x,y,z)}{d\alpha}\,d\alpha$; и взятыя въ (5) вмѣсто x_1-x, y_1-y, z_1-z, они тождественно будутъ удовлетворять это уравненіе, въ виду значеній (7) A, B, C или соотношеній (6).

175. — Касательныя плоскости, проходящія черезъ данную точку или параллельныя данной прямой.

Предположимъ, что требуется провести къ поверхности, извѣстное уравненіе которой — формы $F(x, y, z) = c$, касательныя плоскости, проходящія черезъ данную точку $A(x_1, y_1, z_1)$, или такія, что координаты x_1, y_1, z_1 этой точки удовлетворяютъ соотношеніе (2) [стр. 259]. Надо будетъ выразить, что точки контакта $M(x, y, z)$ удовлетворяютъ: 1) уравненіе $F = c$ поверхности и 2) соотношеніе (2), гдѣ будутъ взяты за x_1, y_1, z_1 координаты данной точки A и гдѣ неизвѣстными или перемѣнными будутъ, слѣдовательно, x, y, z. Такъ какъ это соотношеніе дѣлается тогда, т.-е. при x, y, z, взятыхъ за подвижныя координаты, уравненіемъ извѣстной поверхности, то мѣстомъ искомыхъ точекъ (x, y, z) будетъ кривая MPQ пересѣченія этой поверхности и данной $F(x, y, z) = c$: ее называютъ *кривой контакта*.

Если дѣло идетъ напр. о поверхности второго порядка, то уравненіе (2), сдѣлавшееся (4) [стр. 260], будетъ первой степени по x, y, z и будетъ представлять тогда извѣстную плоскость, пересѣченіе которой поверхностью (3) дастъ простую коническую линію за кривую контакта. Эта *плоскость контакта* называется *полярной плоскостью* точки A по тношенію къ поверхности второго порядка $F = c$; а точка $A(x_1, y_1, z_1)$

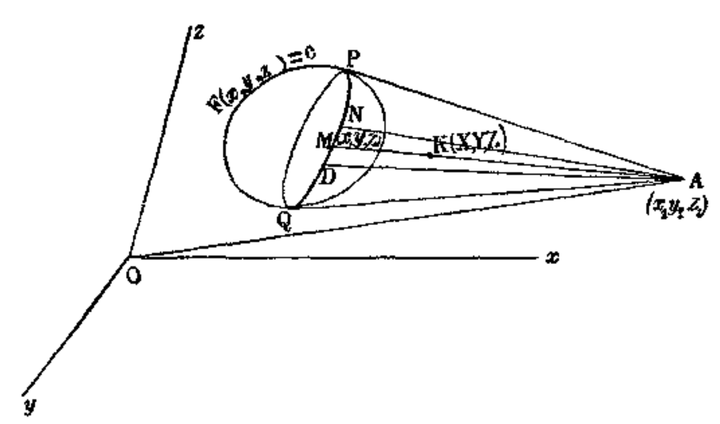


Fig. 25.

называется *полюсомъ* плоскости. Полярныя плоскости и полюсы точно такъ же, какъ аналогичныя (или *полярныя*) прямыя и точки въ кривыхъ второго порядка, обладаютъ замѣчательными свойствами, сводящимися, съ одной стороны, къ тому, что x, y, z и x_1, y_1, z_1 входятъ однимъ и тѣмъ же образомъ или могутъ понѣняться своими ролями въ (4), а съ другой стороны къ тему, что это уравненіе (4) дѣлается уравненіемъ (3) поверхности, когда берутъ x_1, y_1, z_1 равными x, y, z.

Но обратимся къ случаю какой-угодно поверхности и проведемъ въ касательныхъ плосвостахъ, начиная съ ихъ точекъ контакта $M(x, y, z)$, касательныя MA, идущія въ точку A. Плоскость двухъ послѣдовательныхъ, AM и AN напр., изъ этихъ касательныхъ будетъ содержать кромѣ MA, начиная съ M, еще безконечно-малую хорду MN, уподобляемую, очевидно, касательной; а слѣдовательно, эти двѣ прямыя MA, MN *замѣтно* различныхъ направленій (даже въ предѣлѣ, гдѣ длина MN уничтожается) не перестанутъ опредѣлять эту плоскость къ этомъ предѣлѣ, гдѣ она будетъ простираться по двумъ различнымъ касательнымъ, выходящимъ изъ M, и сдѣлается касательной плоскостью въ M къ поверхности. Поэтому можно разсматривать AMN, а также и аналогичную предыдущую плоскость ADM, etc., какъ соотвѣтственныя касательныя къ поверхности въ M, D, etc.; вслѣдствіе этого касательныя AM, AN,... въ предѣлѣ суть послѣдовательныя пересѣченія данныхъ касательныхъ плоскостей.

По этому и по аналогіи съ мѣстомъ послѣдовательныхъ пересѣченій группы кривыхъ, которое есть линія, называемая *ангелопой* группы, *конусъ* $AMPQ$, образуемый касательными, выходящими изъ A, будетъ называться *ангелопой* группы касательныхъ плоскостей, проведенныхъ къ поверхности черезъ точку A. Такъ какъ эти самыя плоскости, проходящія въ конусѣ по двумъ послѣдовательнымъ образующимъ AM и AN, или AD и AM, etc., очевидно, касательны къ нему, то можно сказать, что конусъ-*описанъ* по поверхности $F=c$. Если назвать черезъ X, Y, Z координаты какой-либо, K, изъ его точекъ, расположенной на образующей, соединяющей неподвижную точку (x_1, y_1, z_1) съ движущейся точкой контакта (x, y, z), то уравненія этой образующей будутъ $\frac{X-x_1}{x-x_1}=\frac{Y-y_1}{y-y_1}=\frac{Z-z_1}{z-z_1}$, гдѣ можно представить, что y и z могутъ быть замѣнены своими значеніями въ видѣ функціи x'а, полученными изъ двухъ уравненій кривой контакта. А исключеніе x между этими двумя уравненіями образующей или x'а, y, z между этими и уравненіями кривой контакта, дадутъ наконецъ по отношенію къ X, Y, Z уравненіе конуса, описаннаго изъ вершины A.

Если напр. эта точка A есть свѣтовой фокусъ и если поверхность $F=c$ есть поверхность непрозрачнаго тѣла, *дающаго тѣнь* позади себя, то продолженіе конуса по ту (отъ A) сторону кривой контакта отдѣлитъ освѣщенныя части пространства отъ тѣхъ, которыя не будутъ освѣщаться; вслѣдствіе этого, на самомъ непрозрачномъ тѣлѣ кривая контакта проведетъ эту демаркацію (отдѣленіе). Поэтому-то ее называютъ еще *линіей тѣни*.

Когда точка A удаляется въ безконечность по данной прямой OA, выходящей изъ начала координатъ, то x_1, y_1, z_1 увеличиваются, сохраняя свои отношенія, и уравненіе (2), которое можно принять раздѣленнымъ на количество порядка $\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$, приводится въ окончательномъ

видѣ, въ своей первой части, къ тремъ членамъ, сравниваемымъ съ этимъ радикаломъ. Оно тогда приметъ видъ:

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x} + y_1 \frac{\partial F}{\partial y} + z_1 \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Касательныя плоскости, проходящія черезъ A, дѣлаются параллельными данной прямой OA и ихъ анвелопа, описываемая на поверхности, мѣсто касательныхъ, теперь параллельныхъ къ этой прямой, дѣлается не конусомъ, но *цилиндромъ* (или поверхностью съ прямолинейными и параллельными образующими)

Въ случаѣ поверхности второго порядка, представляемой (3) [стр. 260], кривая контакта будетъ ея пересѣченіемъ плоскостью $\frac{x_1 x}{A} + \frac{y_1 y}{B} + \frac{z_1 z}{C} = 0$, которая проходитъ въ центрѣ ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) поверхности. Это уравненіе показываетъ, что эта плоскость есть плоскость, діаметральная и сопряженная съ направленіемъ OA, или пересѣкающая въ ихъ срединахъ хорды, параллельныя OA. Но это можно было и предвидѣть; дѣйствительно, въ касательныхъ, какъ MA, точка контакта M есть средина безконечно-малой хорды того же самаго направленія, вслѣдствіе чего кривая контакта будетъ частью діаметральной плоскости, содержащей средины всѣхъ хордъ, параллельныхъ OA.

176. — Видимый контуръ поверхности.

Частный случай послѣдней задачи заслуживаетъ спеціальнаго разсмотрѣнія; это случай, при которомъ хотятъ провести къ поверхности $F(x, y, z) = c$ касательныя плоскости или касательныя, параллельныя оси z'овъ. Главная важность его заключается въ томъ, что описанный цилиндръ, анвелопа этихъ плоскостей или мѣсто этихъ касательныхъ, служитъ вмѣсто предѣла совокупностью ординатъ z поверхности. На самомъ дѣлѣ, когда на плоскости xy основанія этихъ ординатъ z, проведенныхъ изъ различныхъ точекъ поверхности или только изъ одного изъ ея скатовъ, не покрываютъ всю плоскость xy, но ограничены извѣстной кривой $M'N'P'Q'$, проекціей линіи, по крайней мѣрѣ, $MNPQ$ поверхности, то (въ виду доказанной безпрерывности разсматриваемыхъ поверхностей) двѣ части поверхности, имѣющія ординаты z меньшими для одной и бо́льшими для другой,

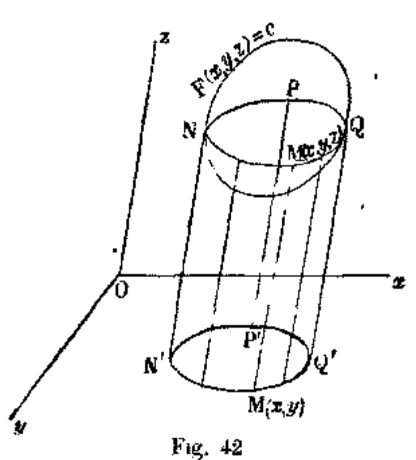


Fig. 42

сходятся по этой линіи $MNPQ$, представляя въ сосѣдствѣ съ ней двѣ ординаты z, очень мало отличающіяся при одной и той же точкѣ(x, y) плоскости xOy; и предѣльный цилиндръ $MNPQQ'M'N'P'$ есть вполнѣ мѣсто *касательныхъ*, параллельныхъ оси Oz.

Но особенно слѣдуетъ разсмотрѣть пересѣченіе его $M'N'P'Q'$ плоскостью xy, мѣсто основаній крайнихъ ординатъ z поверхности. Это мѣсто называютъ *видимымъ контуромъ* послѣдней, потому что оно, очевидно, будетъ ограничивать поверхность для наблюдателя, находящагося въ безконечности на оси z'овъ и видящаго на плоскости xy, какъ на *экранѣ*, что точки поверхности проектируются на основанія своихъ ординатъ z. Чтобы получить уравненіе этого пересѣченія, достаточно замѣтить, что на плоскости xy безконечно близко отъ всякой, какъ M', изъ его точекъ существуютъ точки (x, y), изъ которыхъ выходятъ двѣ безконечно-мало разнящіяся ординаты z, $z+dz$ и которыя даютъ, слѣдовательно, кромѣ $F(x, y, z)=c$, еще $F(x, y, z+dz)=c$ и, слѣдовательно, $\frac{F(x, y, z+dz)-F(x, y, z)}{dz}=0$, т. е. $\frac{\partial F}{\partial z}=0$. Поэтому остается только исключить z между двумя соотношеніями

$$(10) \qquad F(x, y, z)=c, \quad \frac{dF(x, y, z)}{dz}=0.$$

Напр. въ случаѣ поверхности второго порядка (3) [стр. 260] второе соотношеніе (10) даетъ просто $z=0$ и видимый контуръ есть плоскостное сѣченіе, производимое на поверхности плоскостью xy.

179. — Нормаль къ поверхности.

Я ограничусь случаемъ простой поверхности, представляющейся при прямоугольныхъ координатахъ соотношеніемъ вида $z=f(x, y)$. Уравненіе (1) [стр. 259] касательной плоскости сдѣлается здѣсь

$$-p(x_1-x)-q(y_1-y)+(z_1-z)=0,$$

гдѣ p и q означаютъ двѣ частныя производныя отъ $z=f(x, y)$ по x и по y, поэтому всякій перпендикуляръ къ этой плоскости будетъ, по разсужденію, употреблявшемуся уже нѣсколько разъ, имѣть свои косинусы-директоры пропорціональными коэффиціентамъ, $-p$, $-q$, 1, стоящимъ при (x_1-x), (y_1-y), (z_1-z). Слѣдовательно, если назвать теперь черезъ x_1, y_1, z_1 подвижныя координаты уже не плоскости, а *нормали*, которая между этими перпендикулярами есть тотъ, который выходитъ изъ точки (x, y, z) контакта, — то два ея уравненія будутъ,

снова по другому разсужденію, также нѣсколько разъ употреблявшемуся, $\frac{x_1-x}{-p}=\frac{y_1-y}{-q}=\frac{z_1-z}{1}$ или вполнѣ, по сравненію каждаго изъ двухъ первыхъ отношеній съ третьимъ,

$$x_1-x+p(z_1-z)=0,\quad y_1-z+q(z_1-z)=0. \tag{23}$$

Намъ придется провести ее, начиная съ точки (x, y, z), съ той стороны, которая образуетъ съ положительными z острый уголъ, вслѣдствіе чего третій косинусъ-директоръ долженъ быть положительнымъ; обозначимъ черезъ α, β, γ ея три угла съ положительными частями осей, или черезъ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ три разсматриваемые косинусы-директоры. Къ равнымъ отношеніямъ $\frac{\cos\alpha}{-p}$, $\frac{\cos\beta}{-q}$, $\frac{\cos\gamma}{1}$, изъ которыхъ третій берется такимъ образомъ положительнымъ, мы приложимъ четвертое, складывая почленно ихъ квадраты, затѣмъ извлекая изъ результата *положительный* квадратный корень; и ихъ равенство съ этимъ четвертымъ отношеніемъ дастъ намъ для трехъ искомыхъ косинусовъ-директоровъ нормали значенія

$$\cos\alpha=\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad \cos\beta=\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}. \tag{24}$$

Уголъ γ образуется нормалью и осью z'овъ и будетъ имѣть частную важность, по крайней мѣрѣ, если взять плоскость xy горизонталью; дѣйствительно, онъ будетъ равняться углу касательной плоскости съ горизонтальной плоскостью, и его тангенсъ будетъ измѣрять *наклонъ* поверхности въ (x, y, z). Извѣстная формула $\operatorname{tg}\gamma=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\gamma}-1}$ дастъ для этого наклона, если подставить, по третьему (24), p^2+q^2+1 на мѣсто обратнаго отъ $\cos^2\gamma$,

$$\operatorname{tg}\gamma=\sqrt{p^2+q^2}. \tag{25}$$

ГЛАВА XIV.

Кривизна поверхностей.

186. — Формы, которыя образуются вообще поверхностью въ окрестностяхъ одной изъ ея точекъ: параболоидъ контакта.

Всякая поверхность, нормаль которой постепенно измѣняетъ направленіе, когда ея основаніе перемѣщается при этомъ въ сосѣдствѣ съ данной точкой (x, y, z), представляетъ вокругъ этой точки извѣстныя состоянія формы, зависящія отъ быстроты, съ какою, начиная съ этой точки, нормаль начинаетъ вращаться въ различныхъ направленіяхъ. Эти особенности формы, такимъ образомъ функція косинусовъ-директоровъ нормали въ (x, y, z) и ихъ первыхъ производныхъ по x и y или, слѣдовательно, какъ первыхъ, такъ и вторыхъ производныхъ

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ординаты $z=f(x, y)$ поверхности, составляютъ *кривизну* поверхности въ разсматриваемой точкѣ. Онѣ выражаютъ, *если исключить тотъ случай, когда онъ уничтожаются при уничтоженіи* r, s, t, малые отрѣзки между поверхностью и ея касательною плоскостью въ окрестностяхъ данной точки контакта (x, y, z), а, слѣдовательно, если онѣ различаются между собой по формѣ, то различныя поверхности или различныя части одной и той же поверхности.

Количества p, q, r, s, t вычисляются, когда поверхность опредѣляется неявнымъ уравненіемъ, какъ $F(x, y, z)=c$, при помощи частныхъ производныхъ двухъ первыхъ порядковъ отъ F, поэтому можно видѣть, что разсматриваемыя особенности, характеризующія различныя формы поверхности, будутъ зависѣть отъ этихъ двухъ порядковъ производныхъ.

Представимъ себѣ для своль возможнаго упрощенія вопроса, что мы переносимъ начало координатъ въ данную точку (x, y, z), беря за

ось x'овъ и y'овъ двѣ прямолинейныя касательныя къ поверхности и за ось z'овъ нормаль, идущую такимъ образомъ, что сѣченіе поверхности плоскостью zx имѣетъ около начала координатъ ординаты z положительными. Первыя и вторыя производныя отъ z, p, q, r, s, t, будутъ относиться, слѣдовательно, къ началу координатъ, и такъ какъ онѣ по условію будутъ безпрерывны, то функція $z=f(x, y)$ можетъ, въ сосѣдствѣ, быть разложена, по формулѣ Тэйлора, по первымъ и вторымъ степенямъ x'а и y'а, разсматриваемыхъ какъ малыя увеличенія h, k, получаемыя съ этого начала координатъ двумя независимыми координатами: остатокъ R_2 будетъ, вообще несравненно меньше членовъ второй степени. Кромѣ того, такъ какъ значеніе z'а въ началѣ координатъ есть нуль, такъ же какъ отклоненіе $\sqrt{p^2+q^2}$, по отношенію къ плоскости xy, касательной плоскости, проходящей въ этомъ началѣ, то постоянный членъ и члены первой степени px, qy уничтожаются.

Поэтому, если привести значеніе z къ его членамъ порядка малости по x и y, менѣе возвышеннаго, чѣмъ онъ самъ, который здѣсь второго порядка, т.-е. пренебречь R_2, то получится

$$z=\tfrac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2). \tag{1}$$

Но это уравненіе есть уравненіе параболоида, имѣющаго за главную ось — ось z'овъ. Поэтому онъ называется *параболоидомъ контакта;* и дѣйствительно онъ имѣетъ съ данной поверхностью контактъ, вообще, второго порядка, такъ какъ разность, существующая между ихъ соотвѣтственными ординатами z, есть именно остатокъ R_2 порядка малости по x и y болѣе возвышеннаго, чѣмъ второй. Такимъ образомъ, *всякая поверхность съ вполнѣ безпрерывными отклоненіями подобна въ окрестностяхъ какой-либо изъ своихъ точекъ извѣстному параболоиду, описанному вокругъ нормали въ этой точкѣ, какъ оси, и имѣющему въ сосѣдствѣ ея отрѣзки съ поверхностью порядка малости, высшаго, чѣмъ второй.* Такъ какъ всякій параболоидъ, описанный изъ начала координатъ вокругъ оси z'овъ, какъ главной оси, имѣетъ свое уравненіе формы (1), гдѣ r, s, t означаютъ три какіе-либо коэффиціента, — то его отрѣзки съ параболоидомъ (1) и, слѣдовательно, съ поверхностью, въ окрестностяхъ начала координатъ, будутъ порядка квадратовъ или произведеній x'а и y'а, почему эти коэффиціенты отличаются отъ того, чѣмъ они есть въ (1). Поэтому для данной точки существуетъ одинъ только параболоидъ контакта, который и не зависитъ напр. отъ выбора x'а и y'а.

Кромѣ того очевидно, что, если одновременно описать изъ данной точки какую-либо изъ линій поверхности, которыя перекрещиваются здѣсь, и линію параболоида, которая имѣетъ ту же проекцію на поверхность xy, то три подвижныя координаты x, y, z этихъ двухъ линій будутъ функціями времени t, тождественными при двухъ первыхъ x и y.

и различающимися при третьей z только на количество R_3. Двѣ линіи будутъ имѣть, слѣдовательно, въ разсматриваемой точкѣ, контактъ второго порядка и, поэтому, одинъ и тотъ же кругъ-касательный. Иначе говоря, *параболоидъ можетъ быть замѣненъ поверхностью при разсматриваніи кривизны, дающейся въ ихъ точкѣ контакта линіями поверхности, которыя пересѣкаются здѣсь и которыя имѣютъ на соотвѣтствующую касательную плоскость какую-либо данную проекцію.*

187. — Двѣ главныя нормальныя плоскости поверхности и ея два главныхъ сѣченія въ какой-либо одной изъ ея точекъ.

Извѣстно, что всегда возможно выбрать въ плоскости xy и начиная съ одного и того же начала координатъ двѣ новыя прямоугольныя оси x'овъ и y'овъ, по отношенію къ которымъ однородное и второй степени выраженіе $rx^2+2sxy+ty^2$, всегда сохраняющее въ каждой точкѣ плоскости свое первоначальное значеніе, освобождается отъ прямоугольника xy перемѣнныхъ; это — система, образуемая одними и тѣми же осями эллипсовъ или гиперболъ, имѣющихъ уравненіемъ $rx^2+2sxy+ty^2=\text{const}$. Но предположимъ, что приняты тѣ оси, которыя, заставляя исчезнуть членъ $2sxy$, дѣлаютъ, очевидно, нулевою въ точкѣ, взятой за начало координатъ, вторую облическую производную s ординаты. Уравненіе (1) параболоида контакта сдѣлается, если умножить его на 2,

$$(2) \qquad 2z=rx^2+ty^2$$

и уравненіе поверхности будетъ отличаться отъ него только прибавленіемъ ко второй части члена $2R_3$ порядка малости по x и y высшаго, чѣмъ второй. Такъ какъ координаты x и y входятъ въ (2) только въ своихъ квадратахъ, то каждой точкѣ (x, y, z) параболоида соотвѣтствуетъ вторая $(x, -y, z)$, симметричная по отношенію къ плоскости zx, и третья $(-x, y, z)$, симметричная по отношенію къ плоскости zy. Такимъ образомъ плоскость zx и плоскость zy суть плоскости симметріи параболоида и, слѣдовательно, онѣ замѣтно — плоскости симметріи и для данной поверхности въ сосѣдствѣ съ выбраннымъ началомъ координатъ въ томъ смыслѣ, что (исключая одновременнаго уничтоженія r, s, t) поверхность здѣсь безконечно-меньше диссимметрична по отношенію къ этимъ плоскостямъ, чѣмъ по отношенію къ прочимъ какимъ-либо нормальнымъ или проходящимъ по оси z'овъ плоскостямъ. Дѣйствительно, она сдѣлается симметричной по отношенію къ этимъ послѣднимъ только тогда, когда начнутъ совершенно пренебрегать кривизной или обратятъ поверхность въ ея касательную плоскость.

Поэтому, *въ каждой обыкновенной точкѣ поверхности существуютъ двѣ извѣстныя плоскости, нормальныя къ поверхности и прямоугольныя*

между собой, съ обѣихъ сторонъ которыхъ эта поверхность можетъ считаться симметричной въ окружающемъ безконечно-маломъ пространствѣ. Эти плоскости называются *главными плоскостями* поверхности въ разсматриваемой точкѣ; кривыя, по которымъ онѣ пересѣкаютъ поверхность, называются двумя *главными сѣченіями,* относящимися къ этой точкѣ, а ихъ касательныя, взятыя здѣсь за ось x'овъ и y'овъ, можно назвать *главными касательными.*

188. — Характерное свойство главныхъ сѣченій; точки закругленія.

Два главныхъ сѣченія AO, OB поверхности OAB при какой-либо точкѣ O обладаютъ въ этой точкѣ важнымъ свойствомъ, если исключить линіи поверхности, которыя перекрещиваются въ другихъ направленіяхъ. Это свойство состоитъ въ томъ, что *двѣ послѣдовательныя нормали, проходящія къ поверхности, одна — въ разсматриваемой точкѣ O, другая — въ концѣ безконечно-малой дуги OA или OB главныхъ сѣченій могутъ быть считаемы пересѣкающимися, т.-е. проходящими другъ отъ друга на разстояніи болѣе слабомъ, чѣмъ отрѣзокъ OA или OB между ихъ основаніями.*

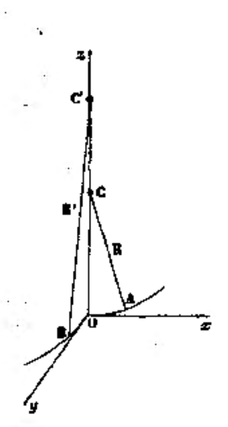


Fig. 43.

На самомъ дѣлѣ въ параболоидѣ, гдѣ существуетъ полная симметрія поверхности по отношенію къ плоскостямъ zOx и zOy, нормали, которыя имѣютъ свои основанія на одной изъ нихъ и которыя не могутъ выходить съ одной стороны, болѣе чѣмъ съ другой, находятся всецѣло на этихъ плоскостяхъ и, слѣдовательно, стараются соединиться гдѣ-либо съ первой нормалью Oz, тогда какъ диссиметрія, существующая по отношенію ко всякой другой плоскости, проходящей въ Oz, заставляетъ, внѣ этой другой плоскости, нормали, основанія которыхъ расположены здѣсь, отклоняться на углы, естественно сравнимые съ такими же измѣненіями направленія, получаемыми этими нормалями съ положенія Oz, или сравнимые еще, численно, съ путемъ, пройденнымъ ими отъ O.

Это можно ясно видѣть, если заставить черезъ точку (x, y, z) параболоида, гдѣ проходитъ вторая нормаль, кроходитъ эллипсъ или гиперболу, лежащую въ этой поверхности, параллельную xy'амъ и имѣющую за уравненіе $rx^2 + ty^2 = \text{const}$. Нормаль къ параболоиду въ (x, y, z), будучи перпендикулярною къ этой кривой, будетъ расположена въ ея нормальной плоскости, параллельной Oz и проектируемой на плоскость кривой по собственной ея (кривой) нормали; вслѣдствіе этого минимальное разстояніе до Oz отъ нормали, идущей въ (x, y, z) къ параболоиду,

разстояніе, очевидно, тождественное разстоянію отъ Oz до нормальной плоскости, о которой идетъ рѣчь, будетъ измѣряться, на этой самой плоскости кривой $rx^2+ty^2=\text{const}$, перпендикуляромъ, идущимъ изъ центра послѣдней, расположеннаго на Oz, къ нормали, выходящей изъ (x, y, z). Но извѣстно, что въ эллипсѣ или гиперболѣ $rx^2+ty^2=\text{const}$. нормаль, идущая въ (x, y, z), проходитъ на разстояніи отъ центра, сравнимомъ съ полудіаметромъ $\sqrt{x^2+y^2}$, направляющимся въ его основаніе, по крайней мѣрѣ, когда послѣдиее не лежитъ на направленіи оси. Это происходитъ, слѣдовательно, какъ уже намъ приходилось доказывать, только вдоль главныхъ сѣченій, которыя пересѣкаются двумя нормалями къ параболоиду; и этихъ сѣченій, какъ осей кривой $rx^2+ty^2=\text{const}$., только два, *если исключить частный случай, при которомъ кривая $rx^2+ty^2=\text{const}$ есть кругъ.*

Кромѣ того, когда переходятъ отъ параболоида въ данной поверхности, то косинусы-директоры нормали и ихъ первыя производныя по x и y, остаются одними и тѣми же въ началѣ координатъ O; а это подразумѣваетъ сохраненіе расположенія этой нормали при однихъ и тѣхъ же какихъ-либо малыхъ значеніяхъ x'а и y'а, получающихъ измѣненія порядка малости высшаго, чѣмъ первый. Слѣдовательно, въ поверхности нормали, проходящія въ A и B, будутъ образовывать, съ своими соотвѣтственными проекціями AC, BC' на двѣ плоскости zOx, zOy, углы, безконечно-меньшіе, чѣмъ OCA и $OC'B$, и могутъ быть не различаемы отъ AC, BC', тогда какъ, если бы плоскость zOA напр. была произвольною нормальною плоскостью, то уголъ нормали, проходящей въ A къ поверхности, съ ея проекціей AC на эту плоскость былъ бы сравнимъ съ OCA или, численно, съ OA, и эта нормаль проходила бы, слѣдовательно, отъ точки C или отъ Oz на разстояніи того же порядка, а не на безконечно-меньшемъ, чѣмъ OA.

Это послѣднее обстоятельство выражается словами: *если съ точки O описать на поверхности безконечно-малый путь во всякомъ другомъ направленіи, а не съ двухъ главныхъ OA и OB или ихъ противоположныхъ, то нормаль, проходящая къ поверхности на второмъ концѣ этого пути, не будетъ встрѣчать нормаль, проходящую къ первому концу, но будетъ проходить отъ нея на разстояніи того же порядка, что и отрѣзокъ между ихъ соотвѣтственными основаніями или проходимый путь.*

Исключеніе изъ этого закона будутъ имѣть, какъ только что было сказано, только кривыя $rx^2+ty^2=\text{const}$, если она имѣютъ болѣе двухъ главныхъ осей, т.-е. если онѣ обращаются въ круги. Этотъ случай происходитъ, когда два главныхъ сѣченія OA, OB равны въ параболоидѣ, или, въ виду уравненій (1) и (2), когда имѣютъ въ разсматриваемой точкѣ заразъ $s=0$ и $r=t$. Тогда удвоенная ордината z, замѣтно выражающаяся черезъ $r(x^2+y^2)$, варіируетъ почти только вмѣстѣ съ разстояніемъ $\sqrt{x^2+y^2}$ отъ каждой точки до оси z'овъ, и парабо-

лоидъ дѣлается *параболоидомъ вращенія* вокругъ этой оси, а всѣ нормальныя въ точкѣ O сѣченія, т.-е. всѣ пересѣченія поверхности плоскостями, проходящими по Oz, дѣлаются главными сѣченіями, по крайней мѣрѣ, когда эта точка разсматривается изолированно, т.-е. когда не разсматриваютъ главныя сѣченія, какъ имѣющія предѣльное расположеніе того, что они имѣютъ въ сосѣднихъ точкахъ. Такая точка O называется *точкой закругленія*.

189. — Главныя кривизны поверхности въ разсматриваемой точкѣ; средняя кривизна и кривизна существенная или постоянная.

Въ предыдущей фигурѣ (fig. 43) нормаль Oz къ поверхности пересѣкается въ двухъ точкахъ C и C' сосѣдними прямыми AC, BC', которыя можно предположить нормальными къ поверхности и, слѣдовательно, къ двумъ главнымъ сѣченіямъ OA, OB, при отрѣзкахъ почти второго порядка относительно направленія или пренебрегаемыхъ въ сравненіи съ углами смежности, какъ OCA, $OC'B$. Плоскости-касательныя кривыхъ OA, OB суть zOx, zOy, почему ось Oz есть главная нормаль, въ O, послѣднихъ и, слѣдовательно, точки C, C' суть (въ предѣлѣ) ихъ соотвѣтственные центры кривизны. Ихъ называютъ двумя *главными центрами кривизны* поверхности для разсматриваемой точки O.

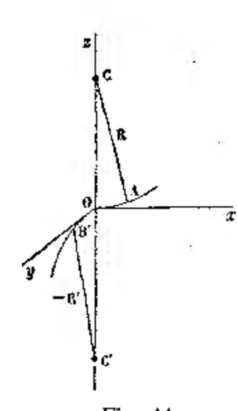


Fig. 44.

Два соотвѣтствующихъ радіуса кривизны, OC или AC и OC' или BC', которые мы назовемъ соотвѣтственно черезъ R и R', называются двумя *главными радіусами кривизны* поверхности, относящимися къ точкѣ O. Принято считать ихъ положительно, когда на нормали CC' они направляются изъ точки O въ сторону, гдѣ они образуютъ острый уголъ съ положительными z'ами, какъ это и было въ фигурѣ 43, но всегда можно допускать, что одинъ изъ двухъ радіусовъ долженъ быть такимъ, если надлежащимъ образомъ провести ось Oz. Такимъ будетъ здѣсь первый R, такъ какъ сѣченіе OA имѣетъ по условію свои ординаты z положительными и обращаетъ, слѣдовательно, свою вогнутость къ положительнымъ z'амъ. Напротивъ ихъ считать слѣдуетъ отрицательно, если радіусъ кривизны направляется отъ точки O въ сторону отрицательныхъ z'овъ, согласно замѣчанію, сдѣланному уже въ теоріи кривизны плоскостныхъ линій (стр. 199). Это будетъ происходить съ R' въ fig. 44, гдѣ второй главный центръ кривизны, C', уже находится не съ той стороны нормали Oz, гдѣ первый центръ C, но съ противоположной.